五、數列與級數

5-1 等差數列

將一些(通常爲有限個)數排成一列，稱爲(有限)數列。在一數列中，我們稱第一個數爲**第一項**或**首項**(通常記爲 a_1)，第二個數爲**第二項**(通常記爲 a_2)，…。當數列只有有限個項時，最後一個數則稱爲**末項**。例如：在數列 20，30，40，50，60，70 中，首項爲 20，第二項爲 30，末項爲 70。

如果在一數列中，任意相鄰兩項的後面的項減去前面的項所得的差都是一樣，就稱此數列爲**等差數列**，並稱所得的差爲**公差**。通常以 d 代表公差，a_1 代表首項，a_n 代表第 n 項。

例如：在數列 20，30，40，50，60，70 中，

$$20 \xrightarrow[10]{} 30 \xrightarrow[10]{} 40 \xrightarrow[10]{} 50 \xrightarrow[10]{} 60 \xrightarrow[10]{} 70$$

首項 $a_1 = 20$，末項 $a_6 = 70$，又因爲後面的項減去前面的項所得的差都是 10，所以這是一個公差爲 10 的等差數列。

又如：在數列 7，4，1，-2，-5，-8，-11 中，

$$7 \xrightarrow[-3]{} 4 \xrightarrow[-3]{} 1 \xrightarrow[-3]{} -2 \xrightarrow[-3]{} -5 \xrightarrow[-3]{} -8 \xrightarrow[-3]{} -11$$

首項 $a_1 = 7$，末項 $a_7 = -11$，又因爲後面的項減去前面的項所得的差都是 -3，所以這是一個公差爲 -3 的等差數列。

【範例 1】 在下列各空格中填入適當的數，使得每個數列成爲等差數列：

(1) 5，8，_____，_____。

(2) 3，-1，_____，_____。

【解】 (1) 因爲公差 $d = 8 - 5 = 3$，所以此數列爲

5，8，<u>11</u>，<u>14</u>。

(2) 因爲公差 $d=-1-3=-4$，所以此數列爲

3，-1，$\underline{-5}$，$\underline{-9}$。

【類題練習1】在下列空格中填入適當的數，使得每個數列成爲等差數列：

(1) 5，11，______，______，______。

(2) -2，-9，______，______。

如果一個等差數列的首項爲a_1，公差爲d，則由等差數列的定義可知：

第二項 $a_2=a_1+d=a_1+(2-1)d$；

第三項 $a_3=a_1+2d=a_1+(3-1)d$；

第四項 $a_4=a_1+3d=a_1+(4-1)d$；

$\vdots$

第n項 $a_n=a_1+(n-1)d$

【範例 2】(1) 已知一個等差數列的首項爲 18 且公差爲$\frac{1}{2}$，求第十二項。

(2) 求等差數列 90，77，64，…的公差及第十三項。

(3) 已知某等差數列的首項爲 6 且第四項爲 18。求其公差並寫出此數列的前五項。

【解】 (1) $a_{12}=a_1+(12-1)d=18+(12-1)\times\frac{1}{2}=\frac{47}{2}$

(2) $\because$ 首項爲 90，公差爲 $77-90=-13$

$\therefore$ $a_{13}=90+(13-1)\times(-13)=-66$

(3) 假設公差爲 d。

$\because$ $a_1=6$，$a_4=18$ 且$a_4=a_1+(4-1)d$

$\therefore$ $18=6+3d$

$\Rightarrow$ $d=4$

所以公差爲 4，且前五項爲 6，10，14，18，22。

【類題練習 2】(1) 已知某等差數列的首項為 16 且公差為 3，求第二十項。

(2) 求等差數列 -35，-29，…的公差及第十項。

(3) 已知某等差數列的首項為 2 且第三項為 -8，求其公差並寫出此數列的前六項。

事實上，由 $a_m = a_1 + (m-1)d$，$a_n = a_1 + (n-1)d$，可得

$$a_n - a_m = (n-m)d,$$

也就是說，

$$a_n = a_m + (n-m)d。$$

【範例 3】(1) 已知某等差數列的第五項為 11，且公差為 3，求第十四項。

(2) 已知某等差數列的第三項為 9，且第六項為 21，求首項、公差及第十項。

【解】 (1) $\because\ a_{14} = a_5 + (14-5)\,d$

$\therefore\ a_{14} = a_5 + 9d$

$\Rightarrow\ a_{14} = 11 + 9\times 3 = 38$

答：第十四項為 38。

(2) $\because\ a_6 = a_3 + (6-3)\,d$

$\therefore\ 21 = 9 + 3d$

$\Rightarrow\ d = 4$

又 $a_3 = a_1 + (3-1)\,d$

$9 = a_1 + 2\times 4$

$\Rightarrow\ a_1 = 1$

$a_{10} = a_1 + (10-1)\,d$

$= 1 + 9\times 4$

$= 37$

答：首項為 1，公差為 4，第十項為 37。

【類題練習 3】已知某等差數列的第三項為 10 且公差為 5，求首項及第二十項。

【範例 4】已知-243，-237，-231，$\cdots$ 爲一等差數列。請問第幾項開始爲正數？

【解】 設第n項開始爲正數。

$\because$ $a_1=-243$，公差$d=-237-(-243)=6$

$\therefore$ $a_n=-243+(n-1)\times 6>0$

$\Rightarrow$ $6n-249>0$

$\Rightarrow$ $n>41\frac{1}{2}$

因爲 n 必須爲正整數，所以 n 最小爲 42。

答：第 42 項開始爲正數。

【類題練習 4】已知 241，215，$\cdots$ 爲一等差數列。請問第幾項開始爲負數？

若 a，b，c 三數爲一等差數列，則稱 b 爲 a 與 c 的**等差中項**(或**算術中項**或**算術平均數**)。例如：9 是 5 與 13 的等差中項。換句話說，當 a，b，c 三數成等差數列時，由 $b-a=c-b$ 可知 $2b=a+c$，所以 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

【範例 5】找出適當的 m 值使得-1，m 和 5 三數爲一等差數列。

【解】 $\because$ $2m=-1+5=4$

$\therefore$ $m=2$

【類題練習 5】找出適當的 n 值使得 8，n，2 三數成等差數列。

【重點整理】

1. 在一數列中，如果任意相鄰兩項的後面的項減去前面的項所得的差都是一樣，就稱此數列爲等差數列，並稱所得的差爲公差。通常以 d 代表公差，a_1 代表首項，a_n 代表第 n 項。
2. 如果一個等差數列的首項爲a_1，公差爲d，則第n項$a_n = a_1 + (n-1)d$。
3. 等差數列第n項a_n 與第m項a_m的關係式爲$a_n = a_m + (n-m)d$。
4. 若 a，b，c 三數成等差數列，則稱 b 爲 a 與 c 的等差中項，且 $b = \dfrac{a+c}{2}$。

【家庭作業】

基礎題

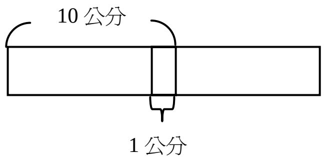
1. 在下列各空格中填入適當的數，使得每個數列成爲等差數列：

   ① 6，10，______，______。　　② -5，-1，______，______。
2. 已知一個等差數列的首項爲 20 且公差爲$\dfrac{1}{4}$，求第十三項。
3. 求等差數列-25，-23，…的公差及第十一項。
4. 已知某等差數列的首項爲 4，且第三項爲-10，求其公差並寫出此數列的前六項。
5. 已知某等差數列的第三項爲 12，且公差爲 3，求第十八項。
6. 已知某等差數列第二項爲 9，且第七項爲 24，求首項、公差及第九項。
7. 請問等差數列-141，-132，…從第幾項開始爲正數？
8. 已知 2，7，m 三數爲一等差數列，求 m 的值。

進階題

9. 請問在 2 與 11 之間插入哪兩個數後，可以成爲等差數列？
10. 在 6 與 30 之間插入 5 個數後，成爲等差數列，請問公差爲多少？

11. 某人將寬 10 公分的白紙黏貼起來，如右圖，已知接縫重合處寬度 1 公分。試回答下列問題：



（1）全長 82 公分是幾張白紙黏貼成的？

（2）20 張白紙黏貼成全長幾公分？

5-2 等差級數

一個級數就是將一個數列的各項依次用「＋」號連接。例如：1，5，25，125，625為一個數列，而$1+5+25+125+625$就是一個級數。因此，一個等差級數就是將一個等差數列的各項依次用「＋」號連接。例如：$1+4+7+10$為一個等差級數。

如果一個等差級數共有n項，其首項為a_1，末項為a_n，公差為d，則這個等差級數的和通常以S_n表示，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\text{。}$$

由

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d] \qquad ①$$

將①式等號右邊各項的順序重新排列成為

$$S_n=[a_1+(n-1)d]+\cdots+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1\text{，} \qquad ②$$

再將①、②兩式相加，即可得到：

$$2S_n=\underbrace{[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]+\cdots+[2a_1+(n-1)d]}_{\text{共 } n \text{ 組}}$$

$$2S_n=n[2a_1+(n-1)d] \;\Rightarrow\; S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

$$\Rightarrow\; S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

如果已經知道等差級數的首項，公差和項數，就可用下列的公式來求等差級數的和：

$$S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

當然，如果已經知道等差級數的首項，末項和項數，就可用下列的公式來求等差級數的和：

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

【範例1】(1) 已知一等差級數的首項爲3且公差5，求前20項的和。

(2) 求等差級數$-16+(-13)+(-10)+\cdots+$第十五項的和。

(3) 求等差級數$18+21+24+\cdots+45$的和。

【解】 (1) $\because$ 首項$a_1=3$，公差$d=5$，項數$n=20$

$$\therefore\ S_{20}=\frac{20\left[2a_1+(20-1)d\right]}{2}=\frac{20\left[2\times3+(20-1)5\right]}{2}=1010$$

(2) $\because$ 首項$a_1=-16$，公差$d=-13-(-16)\ =3$

$$\therefore\ S_{15}=\frac{15\left[2a_1+(15-1)d\right]}{2}=\frac{15\left[2\times(-16)+(15-1)\times3\right]}{2}=75$$

(3) 假設此數列共有n項。

$\because$ 首項$a_1=18$，公差$d=21-18=3$

$\therefore$ 末項$a_n=18+(n-1)\times3=45$

$\Rightarrow$ 項數 $n=10$

$$\therefore\ S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(18+45)}{2}=\ 315$$

【類題練習 1】(1) 求等差級數 $217+225+233+\cdots+$第九項的和。

(2) 求等差數列-1，-4，-7，$\cdots$的前10項的和。

(3) 求等差級數 $7+14+21+\cdots+196$的和。

【範例2】(1) 已知一等差級數的首項爲8，前十項和爲200，求公差及第十項。

(2) 設一等差級數的首項爲15，末項爲-42，和爲-270，求此等差級數的項數及公差。

(3) 已知等差級數$(-6)+(-2)+2+\cdots+$第n項的和爲64。求n的值。

【解】 (1) 設公差爲d。

$\because$ 首項$a_1=8$，項數$n=10$

$$\therefore\ S_{10}=\frac{10\left[2\times8+(10-1)d\right]}{2}=200$$

$$\Rightarrow\ d=\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow\ a_{10}=8+9\times\frac{8}{3}=32$$

(2) 假設數列共有n項，公差d。

$\because$ 首項$a_1=15$，末項$a_n=-42$

$$\therefore\ S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n[15+(-42)]}{2}=-270\ \Rightarrow\ n=20$$

$\because$ $a_{20}=-42=15+(20-1)\times d$

$\therefore$ $d=-3$

(3) $\because$ $a_1=-6$，$d=(-2)-(-6)=4$

$$\therefore\ S_n=\frac{n[2\times(-6)+(n-1)\times 4]}{2}=64$$

$$\Rightarrow\ \frac{n(-12+4n-4)}{2}=64$$

$$\Rightarrow\ \frac{4n^2-16n}{2}=64$$

$$\Rightarrow\ 4n^2-16n-128=0$$

$$\Rightarrow\ n^2-4n-32=0$$

$$\Rightarrow\ (n+4)(n-8)=0$$

$\Rightarrow$ $n=8$或$n=-4$(不合，因爲項數必須爲正數。)

【類題練習2】(1) 設一等差級數的首項爲4，前十項和爲100，求公差及第十項。

(2) 設一等差級數的首項爲20，末項爲92，和爲616，求此等差級數的項數及公差。

(3) 已知等差級數$11+14+17+\cdots+$第n項的和爲245，求n的值。

【範例 3】已知某戲院共有 30 排座位，依次每一排比前一排多 2 個座位，且最後一排有 82 個座位，請問這家戲院共有多少個座位？

【解】 假設第一排有a_1個座位。

$\because\ n=30$，$d=2$，$a_{30}=82$

$\therefore\ a_{30}=a_1+(30-1)\times 2=82$

$\Rightarrow\ a_1=24$

$\Rightarrow\ S_{30}=\dfrac{30(24+82)}{2}=1590$

答：共有 1590 個座位。

【類題練習 3】已知某戲院共有 20 排座位，依次每一排比前一排多 4 個座位，且最後一排有 92 個座位，請問這家戲院共有多少個座位？

【範例 4】100 到 300 的整數中，所有 7 的倍數的和等於多少？

【解】 $\because$ 在 100 到 300 的整數中，7 的倍數中最小的爲 105，

7 的倍數中最大的爲 294。

$\therefore\ a_1=105$，$a_n=294$，$d=7$

$\Rightarrow\ 294=105+(n-1)\times 7$

$\Rightarrow\ n=28$

$\Rightarrow\ S_{28}=\dfrac{28(105+294)}{2}=5586$

【範例 5】有一凸 n 邊形，內角度數依次成等差數列，公差爲 10°，角度最小的爲 99°，則 n 爲多少？

【解】 依題意列式 $180(n-2)=\dfrac{n\left[2\times 99+(n-1)\times 10\right]}{2}$

$\Rightarrow\ 180(n-2)=\dfrac{n\left[10n+188\right]}{2}$

$\Rightarrow\ 5n^2-86n+360=0$

$\Rightarrow\ n=10$ 或 $\dfrac{36}{5}$（不合）

答：$n=10$

【類題練習 4】 200 到 400 的整數中，能被 3 整除的所有數的和等於多少？

【重點整理】

1. 若一個等差級數共有 n 項，且其首項為 a_1，末項為 a_n，公差為 d，則此級數的和為 S_n，其中 $S_n=\dfrac{n\left[2a_1+(n-1)d\right]}{2}$ 或 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

【家庭作業】

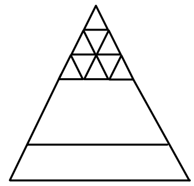
基礎題

1. 求等差級數 $17+25+33+\cdots+$ 第十項的和。
2. 求等差數列 -2，-5，-8，⋯的前 20 項的和。
3. 求等差級數 $3+6+9+\cdots+210$ 的和。
4. 設一等差級數的首項為 5，前十一項和為 440，求公差及第十項。
5. 已知等差級數 $(-10)+(-4)+2+\cdots+$ 第 n 項的和為 170，求 n 的值。
6. 設某一三角形的三個角的度數成等差數列，若已知最大的角是 105 度，則最小的角是幾度？
7. 假設一等差數列的前十項和為 120，前九項和為 99，求公差。

進階題

8. 從 100 到 500 的整數中，試回答下列問題:
   ① 除以 5 餘 2 的整數共有多少個？
   ② 承①，所得整數的總和是多少？

9. 如右圖：第一排有一個三角形，第二排有 3 個三角形，第三排有 5 個三角形，依此類推，共有 11 排。試回答下列問題：



（1）第 11 排有幾個三角形？

（2）全部共有幾個三角形？

10. 在 4 與 28 之間插入 5 個數後，成爲等差數列，請問這 5 個數和爲多少？
11. 在 1 與 49 之間，插入 *m* 個數，使其成爲一等差數列，且其總和爲 250，則 *m* 爲多少？
12. 等差級數共有 15 項，且知第 8 項爲 5，求此級數和。
13. 自 1 到 50 的正整數中，2 或 3 的倍數共有幾個？它們的和爲多少？

5-3 等比數列

觀察數列：2，6，18，54，162，⋯，我們發現：$\dfrac{6}{2}=\dfrac{18}{6}=\dfrac{162}{54}=\cdots=3$。

如果一個數列，任意相鄰兩項的後面一項與前面一項的比值相等時，則稱此數列為**等比數列**。我們稱其比值為**公比**，且通常以 r 表示公比。

如果一個等比數列的首項為a_1，公比為r，則由等比數列的定義可知：

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=r，$$

即

$$a_2=a_1r\ ；$$

$$a_3=a_2r=a_1r\cdot r=a_1r^2=a_1r^{3-1}\ ；$$

$$a_4=a_3r=a_2r\cdot r=a_1r\cdot r\cdot r=a_1r^3=a_1r^{4-1}\ ；$$

$$\vdots$$

$$a_n=a_{n-1}r=a_{n-2}r\cdot r=\cdots=a_1r^{n-1}\ 。$$

【範例 1】在下列各空格填入適當的數，使得每個數列成為等比數列：

(1) 5，10，______，______。

(2) -5，15，______，______。

【解】 (1) 因為公比 $r=10\div5=2$，所以此數列為

5，10，<u>20</u>，<u>40</u>。

(2) 因為公比 $r=15\div(-5)=-3$，所以此數列為

-5，15，<u>−45</u>，<u>135</u>。

【類題練習 1】在下列空格中填入適當的數，使得每個數列成為等比數列：

(1) 2，10，______，_____。

(2) 3，-15，______，______。

事實上，由$a_n=a_1r^{n-1}$，$a_m=a_1r^{m-1}$可知

$$a_n\div a_m=a_1r^{n-1}\div(a_1r^{m-1})=r^{(n-1)-(m-1)}=r^{n-m}\text{，}$$

也就是說，

$$a_n=a_mr^{n-m}\text{。}$$

【**範例 2**】(1) 已知某一等比數列的首項爲 10，公比爲 2，求第四項。

(2) 已知某一等比數列的首項爲 16，第四項爲 2。寫出此數列的前五項。

(3) 已知某一等比數列第三項爲-12，第六項爲 96，求首項及公比。

(4) 已知某一等比數列第四項爲 24，公比爲-2，求第八項。

【**解**】 (1) $a_4=a_1r^{4-1}=10\times 2^{4-1}=80$

(2) 設公比爲 r。

$\because$ 首項$a_1=16$，第四項$a_4=2$

$\therefore$ $a_4=a_1r^3=16r^3=2$

$\Rightarrow$ $r^3=\dfrac{1}{8}$，$r=\dfrac{1}{2}$

所以，前五項爲 16，8，4，2，1。

(3) 由 $a_6=a_3r^{6-3}$

可得 $96=-12r^3$

$\Rightarrow$ $r=-2$

由 $a_3=a_1r^{3-1}$

可得 $-12=a_1(-2)^2$

$\Rightarrow$ $a_1=-3$

所以，首項爲-3，公比爲-2。

(4) $a_8=a_4r^{8-4}$

$=24\times(-2)^4$

$=384$

【類題練習 2】(1) 已知某一等比數列的首項爲 2，公比爲 3，求第五項。

(2) 已知某一等比數列的首項爲 4，第四項爲 32。寫出此數列的前五項。

(3) 已知某一等比數列第二項爲8，第五項爲1，求首項及公比。

(4) 已知某一等比數列第七項爲 64，公比爲 2，求第十項。

【範例3】 籃球自1.5公尺處落下，每次反彈的高度爲上次落下高度的$\frac{4}{5}$，求籃球落地後第三次反彈高度。

【解】 因爲每次反彈的高度爲上次落下高度的$\frac{4}{5}$，所以，第三次反彈高度爲 $1.5\times(0.8)^3=0.768$(公尺)。

答：0.768公尺

【範例 4】 假設某鎭每年的人口數逐年成長且成一等比數列，已知此鎭十年前約有 10 萬人，現在約有 20 萬人，那麼二十年後，此鎭人口約有多少人？

【解】 因爲十年前人口爲 10 萬人，若設每年人口成長率爲 r，所以經過 10 年此鎭人口成長爲 $10r^{10}$萬人。也就是說，

$$10r^{10}=20$$

即 $$r^{10}=2$$

再經過 20 年，人口成長爲：

$$\begin{aligned}20\times r^{20}&=20\times(r^{10})^2\\&=20\times(2)^2\\&=80\text{（萬人）}\end{aligned}$$

答：80萬人

【類題練習3】假設某發卡銀行開辦信用卡業務，第一年的辦卡總張數為10000張，第二年的新辦卡總張數為20000張，預計逐年的新辦卡張數成一等比數列。那麼第五年新辦卡總張數為幾張？

【比例中項】

當 a，b，c 三數為一等比數列時，稱 b 為 a 與 c 的**等比中項**(或者稱為或**比例中項**)。例如：10 是 5 與 20 的等比中項。

如果a，b，c三數為一等比數列，由$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$可知$b^2=ac$，所以$b=\pm\sqrt{ac}$。

【範例 5】已知-2，m，-8 三數成等比數列，求 m 的值。

【解】 $\because m^2=(-2)(-8)=16$

$\therefore m=\pm 4$

【類題練習4】已知5，m，20三數成等比數列，求m的值。

【重點整理】

1. 在一個數列中，如果任意相鄰兩項的後項與前項的比值相等時，則稱此數列為等比數列。我們稱其比值為公比，且通常以r表示之。
2. 如果等比數列首項為a_1時，那麼第n項 $a_n=a_1r^{n-1}$。
3. 等比數列中，第n項a_n 與第m項a_m的關係式為 $a_n=a_mr^{n-m}$。
4. 當a、b、c三數成等比數列時，我們稱b為a與c的等比中項，且$b=\pm\sqrt{ac}$。

【家庭作業】

基礎題

1. 在下列各空格填入適當的數，使得每個數列成為等比數列：

   ① 3，18，_____，_____。　　② -8，2，_____，_____。

2. 已知某一等比數列的首項為 4，公比為 2，求第五項。
3. 已知某一等比數列的首項為8，第四項為1，寫出此數列的前五項。
4. 已知某一等比數列第三項為 24，第六項為 3，求首項及公比。
5. 已知某一等比數列第五項為 24，公比為 2，求第十項。
6. 已知 2，m，18 三數成等比數列，求 m 的值。
7. 已知放射性同位素碳 14 之半衰期約為 6000 年，今有此元素 6×10^{23}個原子，請問 24000 年後原子個數多少個？(說明：半衰期指放射性原子衰變成原來數量的一半所需的時間。)

進階題

8. 已知 a、b、c、d 四正數成等比數列，且 $a+b=8$，$c+d=72$。求此四個數。
9. 已知四整數 a，b，c，d，其中 a，b，c 為等比數列，b，c，d 為等差數列，且 $a+d=7$，$b+c=6$，則此四數為何？
10. 已知三正數成等差數列，其和為 30。若各數依次加 1，5，29 後成為等比數列，則此三數為何？

5-4 等比級數

如同等差級數，一個**等比級數**就是將一個等比數列的每一項依次用「＋」號連接，例如：若a_1，a_2，a_3，⋯，a_n爲一等比數列，則$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$就是一個等比級數。

如果一個等比級數的公比爲r，怎麼計算這個等比級數的和呢？

(1) 當$r=1$時，　$S_n=\overbrace{a_1+a_1+a_1+\cdots+a_1}^{\text{共 } n \text{ 項}}=na_1$。

(2) 當$r\neq 1$時，　$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$。

所以　$S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$　①

各項乘以r，　$rS_n=a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^{n-1}+a_1r^n$　②

將①、②兩式相減即可得到：

$$rS_n-S_n=(r-1)S_n$$
$$=(\cancel{a_1r}-a_1)+(\cancel{a_1r^2}-\cancel{a_1r})+(\cancel{a_1r^3}-\cancel{a_1r^2})+\cdots+(\cancel{a_1r^{n-1}}-\cancel{a_1r^{n-2}})$$
$$+(a_1r^n-\cancel{a_1r^{n-1}})$$

$\Rightarrow$　$(r-1)S_n=a_1r^n-a_1=a_1(r^n-1)$

因此，

$$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}\quad(\text{或寫成}S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r})。$$

※特別說明：當$a_1=1$，$n=3$時，$S_3=1+r+r^2=\dfrac{1-r^3}{1-r}$　③

由③式可得$(1+r+r^2)(1-r)=1-r^3$，此與立方差公式

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$中，$a=1$、$b=r$代入的結果相同。

【範例 1】(1) 已知某一等比級數的首項爲 7，公比爲 3，且有 10 項，求此級數的和。

(2) 已知一等比級數，首項爲 4，公比爲 2，和爲 1020，求項數。

【解】 (1) 因爲$S_{10}=\dfrac{7(3^{10}-1)}{3-1}=\dfrac{7}{2}(3^{10}-1)$，

所以，此等比級數的和爲$\dfrac{7}{2}(3^{10}-1)$。

(2) 假設級數有 n 項。

$\because\ S_n=\dfrac{4(2^n-1)}{2-1}=1020$

$\therefore\ 2^n-1=255 \Rightarrow 2^n=256=2^8 \Rightarrow n=8$

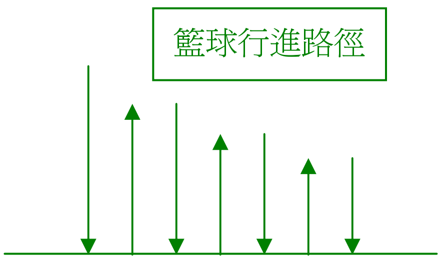
所以，項數爲 8。

【類題練習 1】(1) 已知某一等比級數的首項爲 5，公比爲 2，且有 5 項，求此級數的和。

(2) 已知某一等比級數的首項爲 3，公比爲 2，且和爲 93。求此級數的項數。

【範例2】 籃球自$1\dfrac{1}{2}$公尺處落下，每次反彈的高度爲上次落下高度的$\dfrac{4}{5}$，求籃球開始落下至第四次著地所經過的總路程共有幾公尺？

【解】 因爲每次反彈的高度爲上次落下高度的$\dfrac{4}{5}$，所以，我們知道：



第一次反彈高度爲$1\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}$公尺，因此由第一次落地反彈後再落地時，所經過的總路程爲 $2\times(1\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5})$公尺；

第二次反彈高度爲$1\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{4}{5})^2$公尺，因此由第二次落地反彈後再落地時，所經過的總路程爲 $2\times[1\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{4}{5})^2]$公尺；依此類推，籃球開始落下至第四次著地所經過的總路程爲

$$1\frac{1}{2}+2\times 1\frac{1}{2}\times[\frac{4}{5}+(\frac{4}{5})^2+(\frac{4}{5})^3]$$

$$=1\frac{1}{2}+3\times\frac{\frac{4}{5}\left[1-(\frac{4}{5})^3\right]}{1-\frac{4}{5}}=\frac{1839}{250}\text{公尺。}$$

答：$\frac{1839}{250}$公尺。

【類題練習 2】一個籃球從 12 公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的 $\frac{3}{4}$ 再落下，籃球開始落下至第三次著地，共經過多少公尺？

【範例 3】 <u>小華</u>想要開始儲蓄，並計畫每天的存款爲前一天的兩倍。第一天存 1 元，請問至少幾天後，儲蓄總金額超過 1000 元？

【解】 我們知道，第一天存 1 元，第二天存 2 元，第三天存 4 元，所以第 n 天需要存 2^{n-1} 元。因此，n 天共存了

$$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=\frac{(1-2^n)}{1-2}=(2^n-1)\text{元。}$$

$\because 2^n-1>1000$，即 $2^n>1001$

$\therefore\ n\geq 10 \quad (2^9=512\text{，}2^{10}=1024)$

所以，n 最小爲 10。

答：10 天後。

【類題練習 3】<u>小華</u>想要開始儲蓄，並計畫每天的存款爲前一天的兩倍。第一天存 1 元，請問至少幾天後，儲蓄總金額超過 500 元？

【範例 4】 將十萬元以定期儲蓄存款方式存入銀行十年，年利率爲 5%，按複利計息，則十年期滿可得本利和多少元？

（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.05^{10} \approx 1.629$）

【解】 由本利和=本金× (1＋ 利率)^{期數}，若令本金P，利率r和期數n，

可知: 1 期後本利和 $S=P(1+r)$；

2 期後本利和$S=P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2$；

3 期後本利和$S=P(1+r)^2(1+r)=P(1+r)^3$；

$\vdots$

n期後本利和$S=P(1+r)^n$。

因此，10 年期滿可得本利和爲

$$100000\times(1+0.05)^{10}\approx 162900。$$

答：162900 元。

【類題練習 4】 將二十萬元以定期儲蓄存款方式存入銀行三年，年利率爲 2%，按每年複利計息，則三年期滿可得本利和多少元？

（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.02^3 \approx 1.061$）

【範例 5】 某人每年年初在銀行存入 1 萬元，年利率 5%，若按每年複利計算，則十年期滿可得本利和多少元？

（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.05^{10} \approx 1.629$）

【解】 我們知道：

第一年年初存入的 1 萬元，十年後的本利和爲 10000×1.05^{10}元；

第二年年初存入的 1 萬元，九年後的本利和爲 10000×1.05^{9}元；

依此類推，

第十年年初存入的 1 萬元，一年後的本利和爲 10000×1.05 元。

因此，十年期滿可得本利和爲

$$\begin{aligned}&10000\times 1.05+10000\times 1.05^2+\cdots+10000\times 1.05^{10}\\&=10000\times 1.05(1+1.05+\cdots+1.05^9)\\&=10000\times 1.05\times\frac{1-1.05^{10}}{1-1.05}\approx 132090 \text{ 元}\end{aligned}$$

答：132090 元。

【類題練習 5】銀行優惠存款利率，月息為 1%。每月月初存入 5000 元，按每月複利計算，請問 4 個月期滿本利和為多少元？
（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.01^4 \approx 1.0406$）

【範例 6】某人向銀行貸款 100000 元，月利率 0.3% ，每月複利計息，分三個月償還本金及利息。請問每月平均需付多少元？
（假設借貸期間利率不變，未滿 1 元以 1 元計，且 $1.003^3 \approx 1.00903$）

【解】 我們知道借款與還款在期滿時的本利和應相等，也就是說，

期滿時應還款的總額為 $100000(1+\frac{3}{1000})^3$ 元。

假設每月平均需付 x 元。那麼，

第一個月所還的 x 元，經過 2 個月後的本利和為 $x(1+\frac{3}{1000})^2$ 元；

第二個月所還的 x 元，經過 1 個月後的本利和為 $x(1+\frac{3}{1000})$ 元；

第三個月還 x 元；

期滿時還款的總金額為 $x+x(1+\frac{3}{1000})+x(1+\frac{3}{1000})^2$ 元。

因此，
$$100000(1+\frac{3}{1000})^3 = x+x(1+\frac{3}{1000})+x(1+\frac{3}{1000})^2$$
$$= x+1.003x+(1.003)^2x$$
$$= \frac{1.003^3-1}{1.003-1}x$$
$$= 3.01x$$
$$\Rightarrow \quad 100903 = 3.01x$$
$$\Rightarrow \quad x \approx 33523$$

答：每月需付 33523 元。

【類題練習 6】 某人向銀行貸款 100000 元，月利率 0.2% ，按每月複利計息，分三個月償還本金及利息。請問每月需付多少元？（假設借貸期間利率不變，未滿 1 元以 1 元計，且 $1.002^3 \approx 1.006$ 。）

【重點整理】

1. 如果一個等比級數有n項，其中首項爲a_1，公比爲r，並以S_n表示級數和時，那麼
   (1) 當$r=1$時，$S_n=na_1$；
   (2) 當$r\neq 1$時，$S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$。

【家庭作業】

基礎題

1. 已知某一等比級數的首項爲 5，公比爲 4，且共有 5 項。求此級數的和。
2. 已知某一等比級數的首項爲 4，公比爲 2，且和爲 508。求項數。
3. 已知有 5 個桶子。在第一個桶子放入一個球，第 2 個桶子放入 3 個球，第 3 個桶子放入 9 個球，以此類推，也就是說，後一桶放入的球數爲前一桶放入球數的 3 倍。請問這 5 個桶子共有幾個球？
4. 已知某一等比級數的和爲 1820，公比爲 3，且共有 6 項，求首項。
5. 某發卡銀行的信用卡循環利息爲每月 1.5%，某人刷卡 10000 元，逾繳費期限三個月未繳款，請問此人信用卡債務爲多少元？（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.015^3\approx 1.0457$）

進階題

6. 求 $9+99+999+\cdots+9999999$ 的和。
7. 某人每年年初在銀行存入 1 萬元，年利率 1%，按每年複利計算，則三年期滿可得本利和多少元？(元以下四捨五入)