指數與對數

壹、重點整理

一、指數律、指數函數的性質：

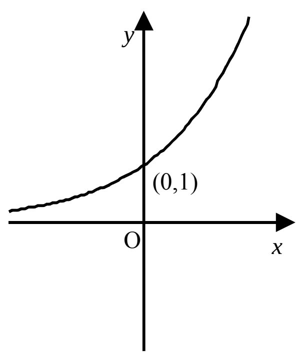
(1)指數律：

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ，$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$ 其中n為自然數，m為整數。

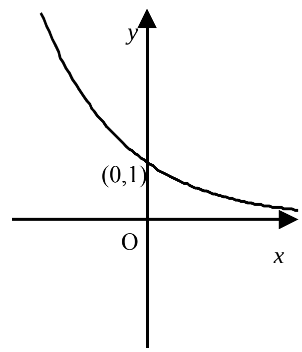
$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$，$(a^r)^s=a^{rs}$，$a^r\cdot b^r=(ab)^r$

(2) 指數函數的圖形：$f(x)=a^x$，$a>0$

$a>1$



$0<a<1$



圖形特性：

①$a>1$ 時，$y=a^x$為遞增函數，即$m>n \Leftrightarrow a^m>a^n$。

$0<a<1$ 時，$y=a^x$為遞減函數，即$m>n \Leftrightarrow a^m<a^n$。

②$y=a^x$之圖形恆在x軸上方，即$a^x>0$，對所有的實數x都成立。

③$y=a^x$恆通過(0,1)

④$y=a^x$之圖形以x軸為水平漸近線。

⑤$y=a^x$之圖形凹向上。即$\dfrac{1}{2}(a^m+a^n)\geq a^{\frac{m+n}{2}}$ ，m,n為任意實數。

二、對數的定義與基本運算性質：

(1)對數的定義：

$a>0$，且$a\neq 1$，當$a^x=b$時，用符號$\log_a b$來表示x，

即$\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b$。

(2)對數的運算與性質：設$a>0$，且$a\neq 1$，b,r,s均為正數

(a)$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$， $a^{\log_a b}=b$ ，$\log_a a^c=c$

(b)$\log_a rs=\log_a r+\log_a s$，$\log_a\dfrac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$

(c) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

(d) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ， $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (b,c均為不等於 1 的正數)

計算要訣：

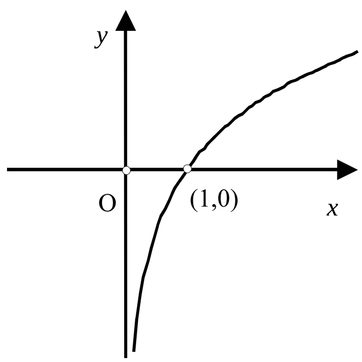
(a)同底對數相加(減)，真數相乘(除)

(b)對數相乘考慮換底公式。

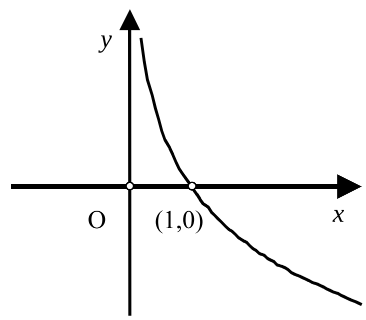
三、對數函數圖形的性質：

(1)$f(x)=\log_a x$ 的圖形

$a>1$



$0<a<1$



(2)圖形的特性：

當$a>1$

(a)圖形在y軸之右方，凹向下，過定點(1,0)。

(b)圖形由左向右逐漸升高且以y軸為漸近線，即$m>n \Leftrightarrow \log_a m>\log_b n$。

(c)$0<x<1 \Leftrightarrow y<0$；$x>1 \Leftrightarrow y>0$

當 $0<a<1$ 時

(a)圖形在y軸之右方，凹向上，過定點(1,0)。

(b)圖形由左向右逐漸下降且以y軸為漸近線，即即$x>y \Leftrightarrow \log_a x<\log_b y$。

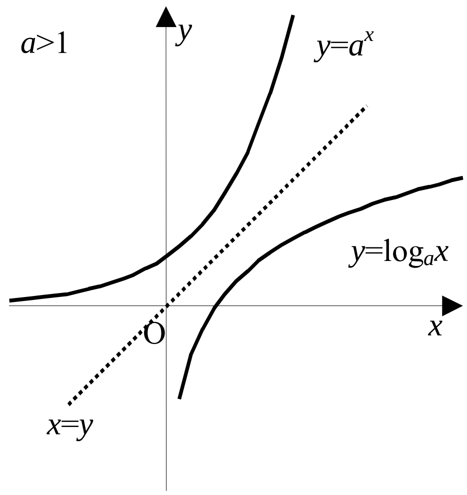
(c) $0<x<1 \Leftrightarrow y>0$；$x>1 \Leftrightarrow y<0$

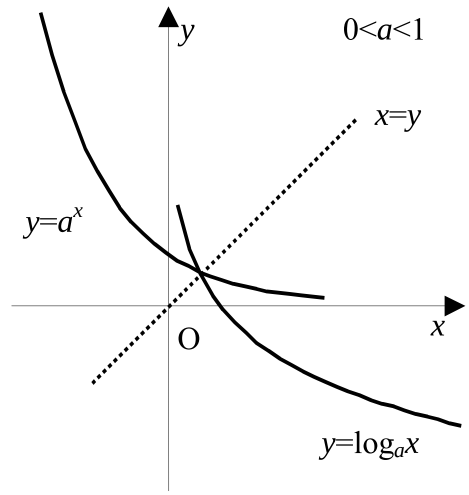
(3)指數函數與對數函數的關係：

(a)$y=\log_a x$與$y=a^x$互為反函數。

點(x_0,y_0)在$y=\log_a x$圖形上 $\Leftrightarrow$ 點(y_0,x_0)亦在$y=a^x$圖形上

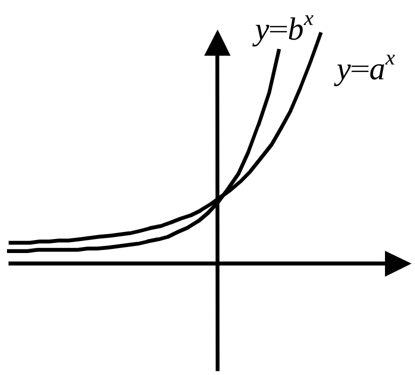
(b)$y=\log_a x$的圖形與$y=a^x$的圖形以直線$y=x$為對稱軸。

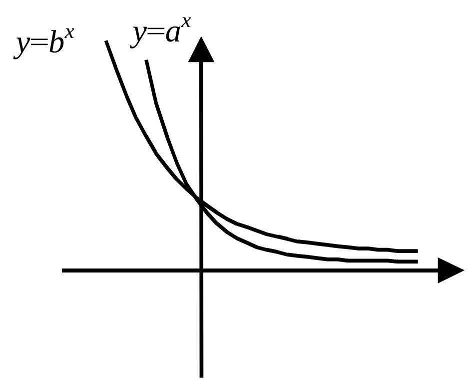




(4) 當a變化時，$y=a^x$的圖形變化：

觀察下列兩個圖：





① 當 $1<a<b$時，如果$x<0\Rightarrow a^x>b^x$；如果$x>0\Rightarrow a^x<b^x$。

② 當 $0<a<b<1$ 時，如果$x<0\Rightarrow a^x>b^x$；如果$x>0\Rightarrow a^x<b^x$。

四、首數與尾數—利用對數判定位數與數字內容

(1)科學記號：

$x=a\cdot 10^n$，($1\le a<10$，n爲整數)，**其中a決定了數字x 的內容，n代表x的位數。**

(2)首數與尾數：

$\log x=\log(a\cdot 10^n)=n+\log a$，$n$爲整數，$\log 1\le \log a<\log 10 \Rightarrow 0\le \log a<1$

整數**n**稱爲**首數**，**log$a$**稱爲**尾數**，即**log$x$=首數+尾數**。因爲a決定了數字x的內容，n代表x的位數。所以首數決定了位數，而尾數決定了數字內容。

$\log x=3.65 \Rightarrow$ 首數=3，尾數=0.65，$\log x=-2.65 \Rightarrow$ 首數=−3，尾數=0.35

請注意：$\log x=-2.65$ 時，因爲 $0\le$尾數<1，因此尾數=0.35 而非-0.65。

$\log x=\bar{2}.8698=-2+0.8698 \Rightarrow$ 首數$=-2$，尾數=0.8698

(3)首數如何決定位數？

已知$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，$\log 7=0.8451$

例如：

$x=1000$ 是 4 位數 $\Rightarrow$ $\log x=3$,首數=3

$x=0.001$ 小數點後第 3 位不爲 0 $\Rightarrow$ $\log x=-3$，首數$=-3$

例如：

$x=20000$ 是 5 位數，$\Rightarrow$ $\log x=4.3010$，首數=4

$x=0.0002$ 小數點後第 4 位 $\Rightarrow$ $\log x=-3.6990=-4+0.3010$ 首數$=-4$

用科學記號來看$x=a\cdot 10^k$，

① 當首數$=n>0$ 時，則$k=n$且x的整數位爲$(n+1)$位。

② 當首數$=-n<0$ 時，則$k=-n$且x的小數部分自小數點後第n位開始不爲 0。

(4)尾數如何決定x的數字內容：

常用的對數：

$\log 1=0$　$\log 2=0.3010$　$\log 3=0.4771$　$\log 4=2\log 2=0.6020$　$\log 5=1-\log 2=0.6990$

$\log 6=\log 2+\log 3=0.7781$　$\log 7=0.8451$　$\log 8=3\log 2=0.9030$　$\log 9=2\log 3=0.9542$

例如：求 7^{100}的首位數字。

解：令 $7^{100}=a\cdot 10^n$，$\log 7^{100}=n+\log a=84.51 \Rightarrow n=84$，$\log a=0.51$

從$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，$\log 7=0.8451$ 可知：

$\log 4=2\cdot\log 2=0.6020$，$\log 5=1-\log 2=0.6990$，$\log 6=\log 2+\log 3=0.7781$，

$\log 8=3\cdot\log 2=0.9030$，$\log 9=2\cdot\log 3=0.9542$。

因爲$\log 3=0.4771<\log a<0.6020=\log 4\Rightarrow 3<a<4\Rightarrow a=3...$

所以 7^{100}的首位數字=3。

貳、精選範例

一、指數律、指數函數的性質：

[**例題**1] (由圖形比較大小)

下列那一個值最小？

(A)$(0.9)^{-3.5}$ (B)$(0.9)^{-2.5}$ (C)$(0.9)^{-1.5}$ (D) $(0.9)^{-\sqrt{3}}$ (E) $(0.9)^{-\sqrt{5}}$ (80 社)

[答案]：：(C)

[解法]：

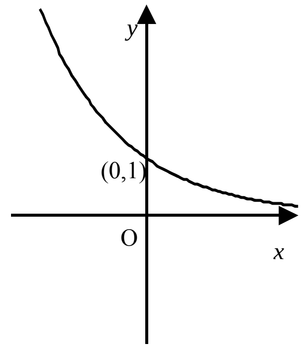
觀察$y=(0.9)^x$的圖形，圖形向右遞減。

即$\alpha>\beta \Leftrightarrow (0.9)^{\alpha}<(0.9)^{\beta}$。

因爲$-3.5<-2.5<-\sqrt{5}<-\sqrt{3}<-1.5$

所以$(0.9)^{-3.5}>(0.9)^{-2.5}>(0.9)^{-\sqrt{5}}>(0.9)^{-\sqrt{3}}>(0.9)^{-1.5}$。

故選(C)

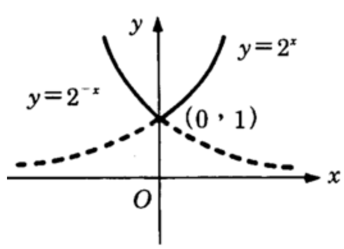


[**例題**2] (函數圖形)

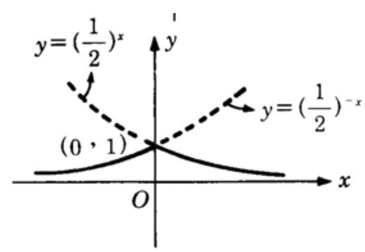
請做下列各函數的圖形：

(1)$y=2^{|x|}$ (2)$y=(\frac{1}{2})^{|x|}$ (3)$y=-(\frac{1}{2})^{|x|}$ (4)$y=-2^{-x}$

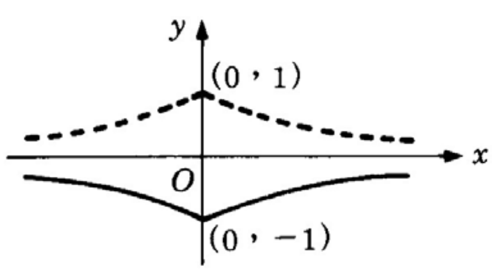
(1)



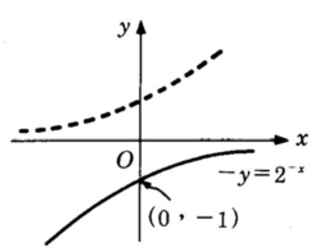
(2)



(3)



(4)



[例題3] (函數圖形與方程式的根)

試問方程式$x^2=2^{-|x|}$有幾個實數解？

[答案]：：2 個

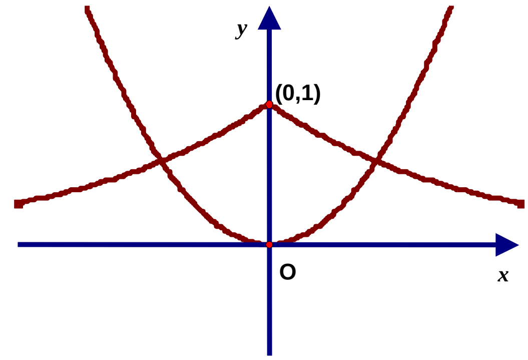
[解法]：

方程式$x^2=2^{-|x|}$實根的個數

=函數$y=x^2$與$y=2^{-|x|}$兩圖形的交點個數。

如圖，可知$y=x^2$與$y=2^{-|x|}$兩圖形有 2 個交點。

所以方程式$x^2=2^{-|x|}$有 2 個實數解。



(練習1) 化簡$(\frac{81}{16})^{-0.25}\cdot(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\cdot(0.25)^{-0.5}$之值爲__________。

[答案]：：3

(練習2) 對任意實數 x 而言，$27^{(x^2+\frac{2}{3})}$的最小值爲

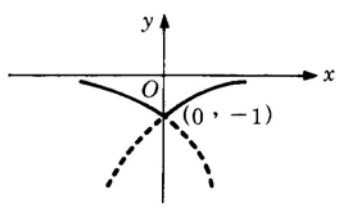
(1)3　(2)$3\sqrt{3}$　(3)9　(4)27　(5)$81\sqrt{3}$　(2008 學科能力測驗)

[答案]：(3)

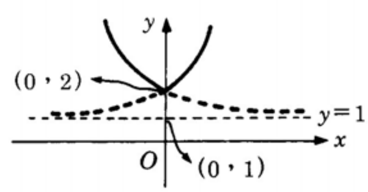
(練習3) 利用$y=2^x$與$y=(\frac{1}{2})^x$之圖形求作(1)$y=-2^{-|x|}$　(2)$y=2^{|x|}+1$ 的圖形。

[答案]：

(1)



(2)



(練習4) 請問方程式$|x|=2^{-|x|}$的實數解有幾個？

[答案]：：2 個

(練習5) 將下列各數依大小順序排列之：

$2^{\frac{2}{3}},4^{\frac{5}{2}},8,(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}},2^{-3},(2^{-\frac{2}{9}})^9$

[答案]：：$4^{\frac{5}{2}}>8>(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}>2^{\frac{2}{3}}>(2^{-\frac{2}{9}})^9>2^{-3}$

(練習6) 設 $a=\sqrt{\frac{1}{2}}$ ，$b=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ ，$c=\sqrt[5]{\frac{1}{5}}$ ，則 a,b,c 的大小順序爲何？

[答案]：：$c>a>b$

二、對數的定義與基本運算性質：

[例題4] (對數的基本運算)

計算下列各式：

(1) $\log_{\sqrt{2}} 8$ (2) $(\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 7}$ (3) $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt[5]{2}$ (4) $\log_{10}4-\log_{10}5+2\log_{10}\sqrt{125}$

[答案]：：(1)6 (2)7(3)$\frac{52}{15}$(4)2

[解法]：

(1) $\log_{\sqrt{2}} 8=\log_{2^{\frac{1}{2}}}^{2^3}=\frac{3}{1/2}\log_2 2=6$ 。

(2) $(\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 7}=x$， $\log_{\sqrt{5}}^{x}=\log_{\sqrt{5}}^{7}\Rightarrow x=7$

(3) $\log_{2\sqrt{2}} 32\sqrt[5]{2}=\log_{2^{\frac{3}{2}}}^{2^{\frac{26}{5}}}=\frac{26/5}{3/2}\log_2 2=\frac{52}{15}$ 。

(4) $\log_{10}4-\log_{10}5+2\log_{10}\sqrt{125}$

$=\log_{10}4+\log_{10}5^{-1}+\log_{10}(\sqrt{125})^2$

$=\log_{10}(4\times5^{-1}\times125)$

$=\log_{10}100 \quad =2$

[例題5] (對數的基本運算)

試求下列各式：

(1)$(\log_{10}2)^3+(\log_{10}5)^3+\log_{10}5\cdot\log_{10}8$

(2)$\log_2 3\cdot\log_7 64\cdot\log_3 5\cdot\log_5 49$

(3) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25} 0.5)$

[答案]：：(1)1 (2)12 (3)$\frac{1}{4}$

[解法]：

(1)$(\log_{10}2)^3+(\log_{10}5)^3+\log_{10}5\cdot\log_{10}8$

$=(\log_{10}2)^3+(\log_{10}5)^3+3\log_{10}5\cdot\log_{10}2\cdot(\log_{10}2+\log_{10}5)$

$=(\log_{10}2+\log_{10}5)^3 \quad =(\log_{10}10)^3 \quad =1$

(2)$\log_2 3\cdot\log_7 64\cdot\log_3 5\cdot\log_5 49$

$=(\frac{\log3}{\log2})(\frac{\log64}{\log7})(\frac{\log5}{\log3})(\frac{\log49}{\log5})\quad =(\frac{\log3}{\log2})(\frac{6\cdot\log2}{\log7})(\frac{\log5}{\log3})(\frac{2\cdot\log7}{\log5})\quad =12$

(3) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25} 0.5)$

$=(\log_2 5+\log_2\sqrt{0.2}\ )(\log_5 2+\log_5\sqrt{0.5}\ )$

$=\log_2(5\cdot\sqrt{0.2})\cdot\log_5(2\cdot\sqrt{0.5}) =\log_2(\sqrt{5})\cdot\log_5(\sqrt{2})$

$=\frac{\log\sqrt{5}}{\log 2}\cdot\frac{\log\sqrt{2}}{\log 5}=\frac{\frac{1}{2}\log 5}{\log 2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\log 2}{\log 5}=\frac{1}{4}$

[例題6] (用對數表示另一個對數)

設$\log_2 3=a$，$\log_3 11=b$，試以a,b表$\log_{66}44$。

[答案]：：$\frac{2+ab}{1+a+ab}$

[解法]：

根據換底公式$\Rightarrow$ $\log_{66}44=\frac{\log_2 44}{\log_2 66}=\frac{\log_2 4+\log_2 11}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 11}$

利用$\log_2 3=a$，$\log_3 11=b$去表示$\log_2 11$，$\log_2 3$，就可以表示$\log_{66}44$。

$\log_2 11=(\log_2 3)(\log_3 11)=ab\Rightarrow \log_{66}44=\frac{\log_2 4+\log_2 11}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 11}=\frac{2+ab}{1+a+ab}$。

(練習7) 試求下列各值：

(1) $2^{-\log_2 3}$ (2) $2^{\frac{\log 3}{2\log 2}}$ (3) $\frac{\log_4 27}{\log_2 3}$ (4) $\frac{\log_5 16}{\log_{25} 8}$

[答案]：：(1)$\frac{1}{3}$ (2)$\sqrt{3}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4)$\frac{8}{3}$

(練習8) 試求下列各值：

(1) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$ (2) $\log_3\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{6}$

(3) $(\log_5 2+\log_{25} 8)(\log_4 3+\log_{\sqrt{2}} 27)(\log_3 0.2+\log_9 5)$

(4) $(\log_2 9)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_{\frac{1}{4}} 8)$

[答案]：：(1)5 (2)-1 (3)$-\frac{65}{8}$ (4)-6

(練習9) 設$a=\log_2 3$，$b=\log_3 11$，以a，b表出

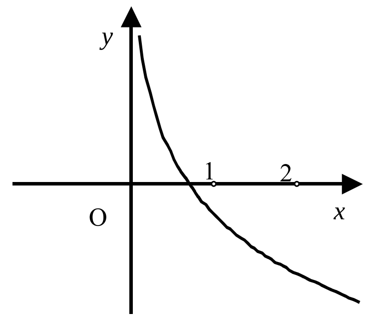
(1) $\log_2 12=$__________。(2) $\log_{66}18=$__________。

[答案]：：(1) $2+a$(2)$\frac{1+2a}{1+a+ab}$

三、對數函數圖形與指數、對數方程式不等式

[例題7] (對數函數的圖形)

右圖為函數$y=a+\log_b x$之部分圖形，其中a,b為常數，則下列何者為真？



(A)$a<0$，$b>1$ (B)$a>0$，$b>1$ (C)$a=0$，$b>1$ (D)$a>0$，$0<b<1$

(E)$a<0$，$0<b<1$　(88 大學聯考社會組)

[答案]：：(E)

[解法]：

如圖，$0<b<1$，再觀察$(1,f(1))$在x軸下方，所以$f(1)=a<0$。

故選(E)

[例題8] (對數函數與指數函數的圖形)

設a為大於 1 的實數，考慮函數$f(x)=a^x$與$g(x)=\log_a x$，試問下列那些選項是正確的？

(1)若$f(3)=6$，則$g(36)=6$

(2) $\dfrac{f(238)}{f(219)}=\dfrac{f(38)}{f(19)}$

(3)$g(238)-g(219)=g(38)-g(19)$

(4)若P、Q為$y=g(x)$的圖形上兩相異點，則直線PQ之斜率必為正數

(5)若直線$y=5x$與$y=f(x)$的圖形有兩個交點，則直線$y=\frac{1}{5}x$與$y=g(x)$的圖形也有兩個交點。(96 學科能力測驗)

[解答]：

(1) 若 $f(3)=6$， 即$a^3=6\Rightarrow 3=\log_a 6\Rightarrow 6=2\log_a 6=\log_a 6^2=\log_a 36$ 則 $g(36)=6$

(2) $\dfrac{f(238)}{f(219)}=\dfrac{a^{238}}{a^{219}}=a^{238-219}=a^{19}=a^{38-19}=\dfrac{a^{38}}{a^{19}}=\dfrac{f(38)}{f(19)}$

(3) g(238)−g(219)=loga238−loga219

$=\log_a\dfrac{238}{219}\neq\log_a\dfrac{38}{19}=\log_a 38-\log_a 19=g(38)-g(19)$

(4) 因a為大於1的實數，故$g(x)=\log_a x$的圖形為遞增，

故若P、Q為$y=g(x)$的圖形上兩相異點，則直線PQ之斜率必為正數

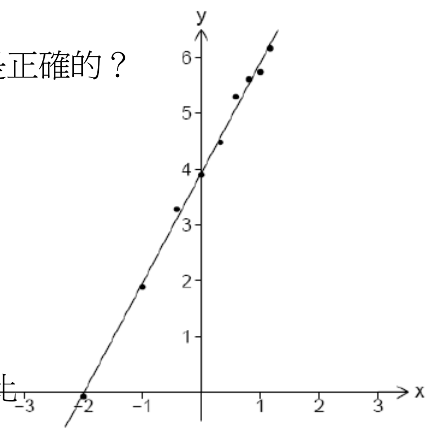
(5) 若直線$y=5x$與$y=f(x)$的圖形有兩個交點，因直線$y=5x$與直線$y=\frac{1}{5}x$對直線$y=x$對稱且$y=f(x)$的圖形與$y=g(x)$的圖形也對直線$y=x$對稱，故直線$y=\frac{1}{5}x$與$y=g(x)$的圖形也有兩個交點。選(1)(2)(4)(5)

[例題9] (對數與數據處理)

某人進行一實驗來確定某運動之距離 d 與時間 t 的平方或立方成正比，所得數據如下：

時間 t (秒)	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
距離 d (呎)	0.95	3.69	9.71	14.88	22.32	39.34	48.68	53.65	71.79

爲探索該運動的距離與時間之關係，令 $x=\log_2 t$ ， $y=\log_2 d$ ，即將上述的數據 (t,d) 分別取以 2 爲底的對數變換，例如：$(2, 53.65)$ 變換後成爲$(1, 5.74)$。已知變換後的數據 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots, (x_9, y_9)$ 之散佈圖及以最小平方法所求得變數 y 對變數 x 的最適合直線（或稱迴歸直線）爲 $y=a+bx$ ，如上圖所示：試問下列哪些選項是正確的？



(1) 若 $d=14.88$，則 $3<\log_2 d<4$

(2) x 與 y 的相關係數小於 0.2

(3) 由上圖可以觀察出 $b>2.5$

(4) 由上圖可以觀察出 $a>2$

(5) 由上圖可以確定此運動之距離與時間的立方約略成正比

(97 指考甲)

[解法]：(1) $8<d=14.88<16 \Rightarrow 3<\log_2 d<4$

(2) 由圖觀察可知x 與 y 爲高度正相關(所有的點都集中在最適合直線的附近)，故相關係數大於 0.2

(3) 由圖，$b=\dfrac{\log_2 14.88-\log_2 0.95}{\log_2 1-\log_2 \frac{1}{4}}=\dfrac{\log_2 15.66\cdots}{2}$ 而 $8=2^3<15.667\ldots<16=2^4$

$\Rightarrow 1.5=\dfrac{3}{2}<b<2$ ，故 $b<2.5$

(4) 由上圖可以觀察出y截距 $a>2$

(5) $y=a+bx \Rightarrow \log_2 d=a+b\log_2 t=\log_2 2^a\cdot b^t=\log_2 A\cdot b^t$

$A\cdot t^{\frac{3}{2}}<d=A\cdot t^b<A\cdot t^2$ 可知此運動之距離並不是與時間的立方成正比

故選 (1)(4)

[例題10] (指數、對數方程式)

解下列方程式：

(1)$7^{2x-1}-3^{3x-2}=7^{2x+1}-3^{3x+2}$ (2)$2^{1-x}-33\cdot 2^{\frac{-x}{2}-2}+1=0$ (3) $2\log_2 x-\log_2(x+6)=3$

[答案]：：(1)$x=\dfrac{\log 35-\log 27}{\log 49-\log 27}$ (2)$x=6$ 或-4 (3) $x=12$

[解法]：

(1) $7^{2x-1}-3^{3x-2}=7^{2x+1}-3^{3x+2}$

$\Rightarrow\dfrac{7^{2x}}{7}-\dfrac{3^{3x}}{9}=7\cdot 7^{2x}-9\cdot 3^{3x}$ $\Rightarrow(7-\dfrac{1}{7})7^{2x}=(9-\dfrac{1}{9})3^{3x}$

$\Rightarrow(\dfrac{49}{27})^x=\dfrac{35}{27}$ $\Rightarrow\log(\dfrac{49}{27})^x=\log\dfrac{35}{27}$

$\Rightarrow x\log(\dfrac{49}{27})=\log\dfrac{35}{27}$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 35-\log 27}{\log 49-\log 27}$。

(2)令$t=2^{\frac{-x}{2}}$，$t^2=2^{-x}$，原方程式可化成 $2^1\cdot t^2-\dfrac{33}{2^2}t+1=0$，整理成

$8t^2-33t+4=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{8}$或 4 $\Rightarrow 2^{\frac{-x}{2}}=\dfrac{1}{8}$或 4$\Rightarrow x=6$ 或-4。

(3) $2\log_2 x-\log_2(x+6)=3$

$\Rightarrow\log_2 x^2-\log_2(x+6)=3$ $\Rightarrow\log_2\dfrac{x^2}{x+6}=3$

$\Rightarrow\dfrac{x^2}{x+6}=2^3\Rightarrow x=12$ 或-4(不合)

[例題11] (指數、對數不等式)

解下列不等式：

(1)$(0.25)^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$ (2)$\log_{14}(x^3-5x+12)<1$ (3)$\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)>1$

[答案]：：(1)$x>2$ 或$x<\dfrac{-1}{3}$(2)$-3<x<-2$ 或 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ (3)$0<x<\sqrt{2}$

[解法]：

(1) $(0.25)^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$ $\Leftrightarrow$ $[(0.5)^2]^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$因爲$y=(0.5)^x$爲遞減函數

$\Leftrightarrow 6x^2>10x+4\Leftrightarrow x>2$ 或$x<\dfrac{-1}{3}$

(2) 解$\log_{14}(x^3-5x+12)<1$

首先考慮真數$x^3-5x+12>0$……..①

又$\log_{14}(x^3-5x+12)<1\Leftrightarrow\log_{14}(x^3-5x+12)<\log_{14}14$，因爲$y=\log_{14}x$爲增函數

$\Leftrightarrow x^3-5x+12<14$….②

①式 $\Leftrightarrow(x+3)(x^2-3x+4)>0$，因爲$x^2-3x+4$ 恆正，$\Leftrightarrow x+3>0\Leftrightarrow x>-3$

②式 $\Leftrightarrow x^3-5x-2<0\Leftrightarrow(x+2)(x^2-2x-1)<0\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<x>1+\sqrt{2}$ 或$x<-2$

由①②的解，取共同部分可得$-3<x<-2$ 或 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$。

(3) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x > 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < (\frac{1}{2})^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{4}$。

[例題12] 解$\log_3(3^x+8)<\frac{x}{2}+1+\log_3 2$。

[答案]：：$\log_3 4<x<\log_3 16$

[解法]：

$\log_3(3^x+8)<\frac{x}{2}+1+\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3(3^x+8)-\log_3 2<\frac{x}{2}+1$

$\Leftrightarrow \log_3\frac{3^x+8}{2} < \frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow \frac{3^x+8}{2}<3^{\frac{x}{2}+1}$

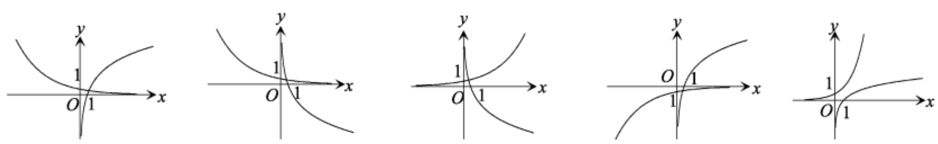
$\Leftrightarrow 3^x+8<2\cdot 3^{\frac{x}{2}+1}$ ，令$t=3^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow t^2+8<6t \Leftrightarrow 2<t<4 \Leftrightarrow 2<3^{\frac{x}{2}}<4$

$\Leftrightarrow \log_3 2<\frac{x}{2}<\log_3 4 \Leftrightarrow \log_3 4<x<\log_3 16$。

(練習10) 設$a>1$，則下列那一個選項，表示函數$y=\log_a x$與$y=a^{-x}$的圖形？

(A) (B) (C) (D) (E)



[答案]：：(A)

(練習11) 若(a,b)是對數函數$y=\log x$圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上？

(1) $(1,0)$ (2) $(10a,b+1)$ (3) $(2a,\ 2b)$ (4) $(\frac{1}{a},1-b)$ (5) $(a^2,2b)$

(98 指考乙)

[答案]：(1)(2)(5)

(練習12) xy平面上如果兩個圖形Γ 、Γ'經平移、旋轉或鏡射後可以重疊，則稱Γ與Γ'全等；則下列那一組圖形全等？

(A)$y=2^x$與$y=2^{-x}$ (B)$y=\log_2 x$與$y=\log_4\sqrt{x}$ (C)$y=\log 4x$與$y=\log 3x$

(D)$y=\log_2 x$與$y=\log_{0.5} x$ (E)$y=2^x$與$y=\log_2 x$。

[答案]：：(A)(C)(D)(E)

(練習13) 解下列的不等式：

(1)$5^x+3\cdot5^{-x}<4$ (2) $(0.7)^{x^2-2x}>0.343$

(3)$\log(6x-x^2)<1+\log(5-x)$ (4) $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{\frac{1}{3}}x>1$

[答案]：：(1)$0<x<\log_5 3$ (2)$-1<x<3$ (3)$0<x<8-\sqrt{14}$ (4)$3^{-\sqrt{2}}<x<3^{-1}$

(練習14) 解$\log_2(2^x+16)<\dfrac{x}{2}+1+\log_2 5$。

[答案]：：$2<x<6$

(練習15) 方程式$x-1=|\log_2 x|$有_____個實根。

[答案]：：2

四、對數表的應用：

[例題13] (利用首數尾數估計數字)

設$y=(\dfrac{2}{3})^{20}$，則

(1)y自小數點後第________位，開始出現不為 0 的數字。

(2)y之小數點後第一個不為 0 的數字為_____________。

[答案]：：(1)4 (2)3

[解法]：

設$(\dfrac{2}{3})^{20}=a\times10^n \Rightarrow \log(\dfrac{2}{3})^{20}=n+\log a$

$\Rightarrow \log(\dfrac{2}{3})^{20}=20(\log2-\log3)=-3.522=-4+0.478$

$\Rightarrow n=-4$，$\log a=0.478$

$\because$ $\log3<\log a<\log4 \Rightarrow 3<a<4 \Rightarrow a=3\ldots.$

$\Rightarrow(\dfrac{2}{3})^{20}=3\ldots.\times10^{-4}$

$\therefore$ $y=(\dfrac{2}{3})^{20}$自小數點後第 4 位開始不為 0，不為 0 的數字是 3。

[例題14] (利用對數表求數字的近似值)

利用對數表計算$\sqrt[3]{\dfrac{12^2\times13.4}{1.03}}$。

(四捨五入，取到小數點以下第二位)

	0	1	2	3	4	5
1.0	**0000**	**0043**	**0086**	**0128**	**0170**	**0212**
1.1	**0414**	**0453**	**0492**	**0531**	**0569**	**0607**
1.2	**0792**	**0828**	**0864**	**0899**	**0924**	**0969**
1.3	**1139**	**1173**	**1206**	**1239**	**1271**	**1303**
1.4	**1461**	**1492**	**1523**	**1553**	**1584**	**1614**

[答案]：：12.34

[解法]：

令$x=\sqrt[3]{\dfrac{12^2\times 13.4}{1.03}}$

$\Rightarrow \log x=\log(\sqrt[3]{\dfrac{12^2\times 13.4}{1.03}})=\dfrac{1}{3}\log(\dfrac{12^2\times 13.4}{1.03})=\dfrac{1}{3}(2\log 12+\log 13.4-\log 1.03)$

$=\dfrac{1}{3}(2\times 1.0791+1.1271-0.0128)=\dfrac{1}{3}\times 3.2725=1.0908$

$\log x=1.0908$，令$x=a\times 10^n \Rightarrow n=1$，$\log a=0.0908$

由對數表可知$\log 1.23=0.0899$，$\log 1.24=0.0924$

利用內插法$\Rightarrow \dfrac{a-1.23}{1.24-1.23}=\dfrac{0.0908-0.0899}{0.0924-.0899}\Rightarrow a=1.234$

$\Rightarrow x=1.234\times 10^1=12.34$，故$\sqrt[3]{\dfrac{12^2\times 13.4}{1.03}}=12.34$。

[例題15] (內插法的意義)

數學教科書所附的對數表中，$\log 4.34=0.6375$、$\log 4.35=0.6385$。根據 log 4.34 和 log 4.35 的查表值以內插法求 log 4.342，設求得的值爲 p，則下列哪一個選項是正確的？

(1) $p=\dfrac{1}{2}(0.6375+0.6385)$ (2) $p=0.2\times 0.6375+0.8\times 0.6385$

(3) $p=0.8\times 0.6375+0.2\times 0.6385$ (4) $p=0.6375+0.002$

(5) $p=0.6385-0.002$ (98 指考甲)

[解法]：設 $\log 4.342=p$，則 $\dfrac{p-0.6375}{4.342-4.34}=\dfrac{0.6385-0.6375}{4.35-4.34}$，

$\Rightarrow \dfrac{p-0.6375}{0.002}=\dfrac{0.6385-0.6375}{0.01} \Rightarrow \dfrac{p-0.6375}{0.2}=\dfrac{0.6385-0.6375}{1}$

$\Rightarrow p-0.6375=0.2\times 0.6385-0.2\times 0.6375$

$\Rightarrow p=0.8\times 0.6375+0.2\times 0.6385$。 選(3)。

[例題16] (利用對數求複利的本利和)

假設目前的定期儲蓄存款的年利率爲 4.8%，每二個月爲一期，複利計算，今存進 10000 元，言明定期 5 年，試利用對數表，求期滿之本利和。

x	1.048	1.024	1.016	1.012	1.008	1.006	1.004	1.002	1.001
$\log x$	0.0203	0.0103	0.0068	0.0051	0.0033	0.0025	0.0017	0.0008	0.0004

x	1.263	1.267	1.265	1.256	1.259	1.247	1.261	1.250	1.253
$\log x$	0.1015	0.1030	0.1020	0.0990	0.1000	0.0960	0.1007	0.0969	0.0979

[答案]：：12560 元

[解法]：

年利率 4.8%，二個月為一期，所以一期的利率為 0.8%

設本利和為$P=10000\times(1+0.8\%)^{30}=10000\times(1.008)^{30}$

利用對數表計算$(1.008)^{30}$的近似值：

$\log(1.008)^{30}=30\times\log1.008=30\times0.0033=0.099$

根據對數表$\log1.256=0.0990 \Rightarrow (1.008)^{30}=1.256$。

本利和$P=10000\times1.256=12560$(元)

[例題17] (對數的應用)

目前國際使用芮氏規模來表示地震強度，設$E(r)$為地震芮氏規模r時震央所釋放出來的能量，r與$E(r)$的關係如下：$\log E(r)=5.24+1.44r$,

(1)某次地震其芮氏規模為 4，試問其震央所釋放的能量$E(4)$為多少?

(2)試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放能量之多少倍? [整數倍以下捨去，已知 $10^{1.44}=27.54$]。

(90 大學聯考社會組)

[答案]：(1)10^{11}　(2)758

[解法]：

(1)$\log E(4)=5.24+1.44\times4=11 \Rightarrow E(4)=10^{11}$。

(2)$\log E(6)=5.24+1.44\times6=13.88 \Rightarrow E(6)=10^{13.88}$

$\dfrac{E(6)}{E(4)}=\dfrac{10^{13.88}}{10^{11}}=10^{2.88}=(10^{1.44})^2=(27.54)^2\fallingdotseq758$。

[例題18] (對數的應用)

根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的$100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？__________。

(1) 5 小時　(2) $7\frac{1}{2}$小時　(3) 9 小時　(4)$11\frac{1}{2}$小時　(5) 13 小時

(92 學科能力測驗) [答案]：(4)

[解法]：

依題意可得$\begin{cases}100(1-2^{-3k})\%=70\% \\ 100(1-2^{-kT})\%=99\%\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(1-2^{-3k})=0.7 \\ (1-2^{-kT})=0.99\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2^{-3k}=0.3 \\ 2^{-kT}=0.01\end{cases}$

取對數$\Rightarrow\begin{cases}-3k\cdot\log 2=\log 0.3\cdots(1)\\ -kT\cdot\log 2=\log 0.01\cdots(2)\end{cases}$

$\dfrac{(1)}{(2)}\Rightarrow\dfrac{3}{\text{T}}=\dfrac{\log0.3}{\log0.01}\Rightarrow\text{T}=\dfrac{3\cdot\log0.01}{\log0.3}\fallingdotseq 11.4\ldots$故選(4)。

[例題19] (對數的應用)

濃度 8%的食鹽水 100 克，今從中取出 20 克再加入 20 克的純水混合，再從其中取出 20 克後，再加入 20 克的純水混合，如此繼續操作n次，欲使食鹽水的濃度低於 2%，求n的最小值。

[答案]：：7

[解法]：

從食鹽的重量而言，原先有 100 克×8%=8 克。

第一次混合取出 20 克的純水，其中有 8 克$\times\dfrac{20}{100}=\dfrac{8}{5}$克的食鹽，

剩下 8 克$\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{32}{5}=6.4$ 克的食鹽，因此濃度爲 6.4%=8%×0.8。

同理第二次混合，食鹽剩下 8 克$\times(\dfrac{4}{5})^2$，因此濃度爲 $8\%\times(0.8)^2$。

…，第n次操作後，食鹽水的濃度爲 $8\%\times(0.8)^n$，

依題目要求，$8\%\times(0.8)^n<2\%\Rightarrow(0.8)^n<\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow n\cdot\log(0.8)<\log\dfrac{1}{4}\Rightarrow n(3\log2-1)<-2\cdot\log2$

$\Rightarrow n>6.206\ldots\Rightarrow n\geq7$。

所以n的最小值爲 7。

(練習16) 若$A=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{73}$，則

(a)A爲幾位數？ (b)A的最高位數爲多少？ (c)A的個位數爲何？

[答案]：：(a)23 位 (b)1 (c)3

(練習17) 在 1999 年 6 月 1 日數學家利用超級電腦驗證出 $2^{6972593}-1$ 是一個質數。若想要列印出此質數至少需要多少張A4 紙？假定每張A4 紙，可列印出 3000 個數字。在下列選項中，選出最接近的張數。[$\log_{10}2\approx0.3010$]

(A) 50 (B) 100(C) 200 (D) 500(E) 700 (89 學科能力測驗)

[答案]：(E)

(練習18) 將 3^{100}以科學記號表示：$3^{100}=a\cdot10^m$，其中 $1\leq a<10$，m爲整數，

則a的整數部分爲________。 (86 學科能力測驗)

[答案]：5

(練習19) 在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10？

(1) 24 小時。 (2) 48 小時。 (3) 69 小時。 (4) 96 小時。 (5) 117 小時。

(95 學科能力測驗)

[答案]：(5)

(練習20) 若 I 為地震時所散發出來的相對能量，則芮氏規模 r 定義為 logI。1999 年 921 大地震，地震規模最大達芮氏規模 7.3，而 1995 年日本阪神大地震地震規模最大達芮氏規模 7.2，試問 921 大地震所釋放的能量為日本阪神大地震的_______倍。(log1.259=0.1，log7.2=0.8573,log7.3=0.8633)

[答案]：1.259

(練習21) 所謂PH值是指溶液中氫離子濃度的對數值加上負號，

(即PH值$=-\log[H^+]$，其中$[H^+]$為氫離子濃度)，現在把PH值為 3 與 4 的酸性溶液依 3 比 4 混合，求混合溶液的PH值。 (log3.4=0.5315，log7=0.8451)

[答案]：3.3

(練習22) 某人向地下錢莊借了 10000 元，言明日利率為 2%，每日複利計算，借了一年(366 天)後，應該要還 _________________元。

[答案]：1405 萬元 (請利用對數表)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19

(練習23) 根據內政部統計，台灣地區在西元 2000 年底有 2228 萬人，而最近九年的人口平均年增加率爲 0.0087，假設此後一世紀內，人口的年增加率皆爲 0.0087，則台灣地區人口增加 50%而達到 3342 萬時，會最接近下面所列的哪一年(西元)？(A) 2040　(B) 2050　(C) 2060　(D) 2070　(E) 2080

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

[答案]：：(B) (90 大學聯考自然組)

叁、綜合練習

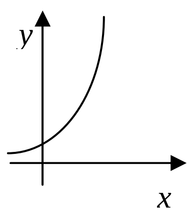
(A)學科能力測驗、聯考試題觀摩

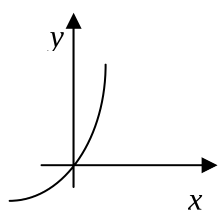
1. 某甲在股票市場裡買進賣出頻繁。假設每星期結算都損失該星期初資金的 1%，而n個星期結束後資金損失已經超過原始資金的一半，則n的最小值爲____________。(已知$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}11=1.0414$) (89 大學聯考自然組)

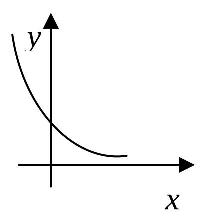
2. 若實數x滿足 $1+\log_4(x-1)=\log_4(x-9)^2$，試求$x$的值。 (87 大學聯考社會組)

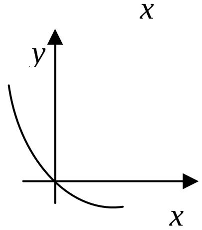
3. 若實數x滿足不等式$\log_3(3^x+8)<\dfrac{x}{2}+1+\log_3 2$，則$x$的範圍爲
(A)$\log_3 2<x<\log_3 8$ (B)$1<x<\log_3 12$ (C)$\log_3 4<x<\log_3 8$ (D)$\log_3 4<x<\log_3 16$
(E)$\log_3 8<x<\log_3 16$。(84 大學聯考社會組)

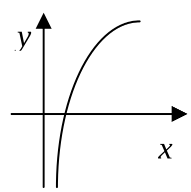
4. 若$a>0$ 且$a\neq1$,則下列何者可能是指數函數$y=a^x$的部分圖形？(87 大學聯考社會組)

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


5. 設年利率爲 12.5%，若依複利計算，則最少要________年(取整數年數)本利和才會超過本金的 2 倍。 (86 大學聯考自然組)

6. 某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6%複利計算，則某甲需要________年就可還清。(答案以四捨五入計算成整數，而$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}1.006=0.0026$) (88 大學聯考自然組)

7. 下列選項何者爲真？

(A)$\frac{2^{10}+2^{20}}{2}>\sqrt{2^{10}\cdot 2^{20}}$ (B)$\frac{(\frac{1}{2})^{10}+(\frac{1}{2})^{20}}{2}>\sqrt{(\frac{1}{2})^{10}\cdot(\frac{1}{2})^{20}}$ (C)$\sqrt{10}+\sqrt{20}>\sqrt{30}$

(D)log10+log20>log30 (E)$\frac{10^2+20^2}{2}>(\frac{10+20}{2})^2$。 (89 大學聯考社會組)

8. 某食品實驗室混合甲、乙兩種菌種製成一種新食品，調查發現乙菌個數是甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎。又知道甲菌一日後增加一倍，乙菌增加三倍(成為原來四倍)。現取同數量的甲乙兩菌，讓它們同時繁殖。試問至少第______天後混合甲乙兩菌才能製成受歡迎的食品。(已知 log2=0.3010) (89 大學聯考社會組)

9. 前行政院長提出知識經濟，喊出 10 年內要讓台灣 double(加倍)，一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍。如果每年調薪 a%，其中 a 為整數，欲達成小市民的希望，那麼 a 的最小值為_____. (參考數值：log2=0.3010) (91 指定考科乙)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log(1+0.01x)$	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

10. 陳老師證明了$x^2=2^x$有兩個正實數解及一個負實數解後，進一步說，此方程式兩邊各取$\log_2$，得 $2\log_2 x=x$；陳老師要同學討論此新的方程式有多少實數解？____
小英說：恰有三個實數解；
小明說：恰有兩個正實數解；
小華說：最多只有兩個實數解；
小毛說：仍然有兩個正實數解及一個負實數解；
小芬說：沒有實數解。
請問哪些人說的話，可以成立？____________
(1)小英 (2)小明 (3)小華 (4)小毛 (5)小芬 (92 指定考科乙)

11. 根據對數表，$\log 2$ 的近似值是 0.3010，$\log 3$ 的近似值是 0.4771。下列選項有哪些是正確的？ (1) $10^9>9^{10}$ (2) $10^{12}<12^{10}$ (3) $10^{11}>11^{10}$ (4) 方程式 $10^x=x^{10}$ 有一負根。(93 指定考科甲)

12. 統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實面積的 0.7 次方成正比。例如：大圖形是小圖形的 3 倍，眼睛感覺到的只有$3^{0.7}$（約 2.16）倍。觀察某個國家地圖，感覺全國面積約為某縣面積的 10 倍，試問這個國家的實際面積大約是該縣面積的幾倍？
（已知$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 7\approx 0.8451$）
(1) 18 倍 (2) 21 倍 (3) 24 倍 (4) 27 倍 (5) 36 倍(93 指定考科乙)

13. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（W/m^2）來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為$I_0=10^{-12}(W/m^2)$；當測得的聲音強度為$I(W/m^2)$時，所產生的噪音

分貝數 d 爲 $d(I)=10\cdot\log\dfrac{I}{I_0}$

(1) 一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度爲$10^{-12}(W/m^2)$，求其產生的噪音分貝數。

(2)汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度爲$10^{-4}(W/m^2)$，問此聲音強度產生的噪音爲多少分貝？

(3)棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音爲 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約爲多少分貝？ (93 指定考科乙)

14. 地震規模的大小通常用芮氏等級來表示。已知芮氏等級每增加 1 級，地震震幅強度約增加爲原來的 10 倍，能量釋放強度則約增加爲原來的 32 倍。現假設有兩次地震，所釋放的能量約相差 100,000 倍，依上述性質，則地震震幅強度約相差幾倍？請選出最接近的答案。

(1) 10 倍　(2) 100 倍　(3) 1000 倍　(4) 10000 倍　(94 指考甲)

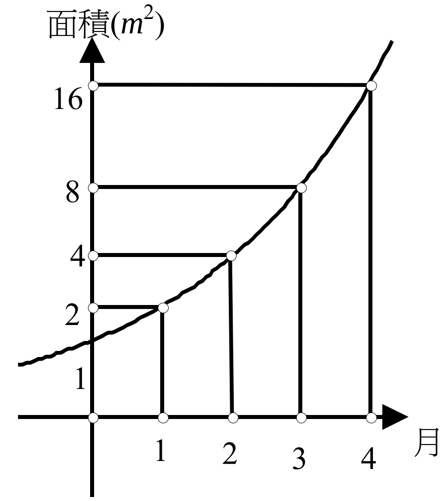
15. 根據過去長期統計資料顯示： 某公司推銷員的年資 x (年)， 與每次推銷成功的機率 $y(x)$， 滿足下列關係式： $y(x)=\dfrac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}$

(1)化簡 $r(x)=\dfrac{y(x)}{1-y(x)}$，並說明 $r(x)$的值隨 x 增大而增大(即 $r(x)$爲遞增函數)。

(2) 說明年資 8 年(含)以上的推銷員，每次推銷**不成功**的機率小於 4%。
(94 指考乙)

16. 設$a_1, a_2, a_3,\ldots, a_{10}$是一等比數列，其首項$a_1>1$ 且公比$r>1$。坐標平面上有一質點 M自原點(0 , 0)出發，依以下規則連續移動十次：第一次移動往右$\log a_1$單位，第二次移動向上$\log a_2$ 單位，第三次移動往右$\log a_3$單位，第四次移動向上$\log a_4$單位，依此類推直到第十次；即第 $2k-1$ 次的移動是往右$\log a_{2k-1}$單位，接著第 $2k$次的移動是向上$\log a_{2k}$單位。已知經過這十次的移動後，該質點M停在點 $(5+5\log 2, 5+\frac{15}{2}\log 2)$的位置上，試問首項$a_1$ 與公比r組成的序對(a_1,r)爲以下哪一選項？(1)$(\sqrt{2},\sqrt{2})$　(2)$(2\sqrt{2},\sqrt{5})$　(3) $(2,\sqrt{2})$　(4)$(5,\sqrt{5})$　(5)$(5,\sqrt{2})$
(96 指考甲)

17. (如圖)爲某池塘中布袋蓮蔓延的面積與時間的關係圖，假設其關係爲指數函數，試問下列何者爲真？
(A)此指數的底數爲 2 (B)在第 5 月時，布袋蓮的面積就會超過 $30m^2$ (C)布袋蓮從 $4m^2$蔓延到 $12m^2$只需 1.5 個月 (D)設布袋蓮蔓延到 $2m^2$，$3m^2$，$6m^2$，所需的時間分別爲t_1，t_2，t_3，則$t_1+t_2=t_3$ (E)布袋蓮在第 1 到第 3 個月之間蔓延平均速度等於第 2 到第 4 個月之間蔓延平均速度。
(87 學科能力測驗)



18. 觀察相關的圖形，判斷下列選項何者爲真？
(A)$10^x=x$有實數解。 (B)$10^x=x^2$有實數解。 (C)x爲實數解時，$10^x>x$恆成立。
(D)$x>0$ 時，$10^x>x$恆成立。 (E)$10^x=-x$有實數解。 (91 學科能力測驗)

19. 某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，言明月利率 0.5%按複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出，某乙則於 89 年 7 月起，每單月(一月、三月、五月、…)1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。一整年中，兩人都存入本金 12000 元。提出時，甲得本利和A元，乙得本利和B元。問下列選項何者爲真？
(A)B>A (B)$A=1000[\sum_{k=1}^{12}(\frac{1005}{1000})^k]$ (C)$B=2000[\sum_{k=1}^{6}(\frac{1005}{1000})^{2k}]$
(D)$A<12000(\frac{1005}{1000})^{12}(E)B<12000(\frac{1005}{1000})^{12}$。 (91 學科能力測驗)

20. 設a,b爲正實數，已知$\log_7 a=11,\ \log_7 b=13$；試問$\log_7(a+b)$之值最近下列別個選項？(1) 12 (2) 13 (3) 14 (4) 23 (5) 24 (94 學科能力測驗)

21. 設實數x滿足 $0<x<1$，且$\log_x 4-\log_2 x=1$，則$x=$______。(化成最簡分數)
(96 學科能力測驗)

22. 已知一容器中有A、B兩種菌，且在任何時刻A,B兩種菌的個數乘積爲定值 10^{10}。爲了簡單起見，科學家用$P_A=\log(n_A)$來紀錄A菌個數的資料，其中n_A爲A菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？
(1)$1\le P_A\le 10$
(2)當$P_A=5$ 時，B菌個數與A菌個數相同
(3)如果上週一測得P_A值爲 4 而上週五測得P_A值爲 8，表示上週五A菌個數是上週一A菌個數的 2 倍
(4)若今天的P_A值比昨天增加 1，則今天的A菌比昨天多了 10 個
(5)假設科學家將B菌的個數控制爲 5 萬個，則此時 $5<P_A<5.5$ (97 學科能力測驗)

(B)**重要問題觀摩：**

23. 已知

x	5.45	1.07	7.58	9.16	9.17
$\log x$	0.7364	0.0294	0.8797	0.9619	0.9624

，

若 $a=\sqrt[3]{\frac{5.45\times 10.7}{75.8}}$，求 a 之近似值至小數點後第四位。

24. 若$2^{\log_4 7}=7^x$，則 $x=$？ (90 年台北區學測模擬考)

25. 下列與對數有關的敘述，那些是正確的？

(A)$\log20-\log2+\log_3 1=1$

(B)$(\log_a x)^2=2\log_a x$

(C)若$\log_5 3=a$，$\log_5 4=b$，則$\log_{25}12=\dfrac{ab}{2}$。

(D)若$\log x$與$\log2001$ 的尾數相同，而$\log x$的首數爲-2，則$x=0.02001$。

(E)6^{100}是一個 77 位數的整數。(90 年台北區學測模擬考)

26. 不等式$\log_{0.5}(x-2)>\log_{0.25}(4x^2-17x+4)$的解爲　(A)$4<x$ (B)$2<x<4$ (C)$4<x<\dfrac{13}{3}$ (D)$\dfrac{13}{3}<x$ (E)以上皆非

27. 已知 $\log x$ 之尾數與 $\log0.1234$ 之尾數相同，$\log x$ 之首數與 $\log5678$ 之首數相同，則 $x=$　(A)0.1234 (B)0.5678 (C)5678 (D)1234 (E)無法判斷。

28. 已知 $\log2.45=0.3892$，$\log2.46=0.3909$，$\log4.07=0.6096$，$\log4.08=0.6107$

(1)若 $\log x=-2.3897$，求 x。 (2)若 $\log x=1.3895$，求 x。

29. 設$A=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+...+(\frac{1}{2})^{100}$，若將A表成小數，則在小數點後第_____位開始出現不爲 9 的數字。

30. 假設放射性元素鐳每經 1 年質量只剩下原質量的 a 倍，其中 a 爲一常數，已知鐳的半衰期(即衰變到質量一半所需的時間)爲 1600 年，求鐳衰變到原質量的$\frac{3}{4}$時所需的時間。

31. 天上的星光有的較亮，有的較暗，天文學以「星等」區分之，即選擇某一特定的星光強度F_0爲標準，對於發出星光強度爲F的星體，定義其「星等」爲$m=-2.5\log\frac{F}{F_0}$，並稱該星體爲「m等星」。已知天狼星爲-1.4 等星，北極星爲 2 等星，則天狼星的星光強度大約是北極星的幾倍？

(A)3 (B)13 (C)23 (D)33。　(92 年台北區指定考科模擬考)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17

32. 設 $10\le x<100$，且$\log x^2$與$\log\frac{1}{x}$之尾數相同，則x=?

33. n為正整數，$\log2=0.3010$，$\log3=0.4771$， ，則使$(\frac{5}{3})^n$之整數部分為七位數之n值=__________ 。

肆、綜合練習解答

1. [答案]：69

[解法]：

設最初資金爲A元

依題意，n個星期後資金剩下$A(1-0.01)^n$

$\Rightarrow A-A(1-0.01)^n>\frac{1}{2}A$

$\Rightarrow (0.99)^n<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow n\times\log0.99<\log\frac{1}{2}$

$\Rightarrow n\times(\log99-\log100)<-\log2$

$\Rightarrow n\times(2-\log99)>\log2$

$\Rightarrow n>\dfrac{0.3010}{2-(2\times0.4771+1.0414)}=\dfrac{0.3010}{0.0044}\fallingdotseq 68.4$

故n的最小值爲 69。

2. [答案]：17 或 5

[解法]：

$1+\log_4(x-1)=\log_4(x-9)^2$

$\Rightarrow \log_4 4(x-1)=\log_4(x-9)^2$

$\Rightarrow 4(x-1)=(x-9)^2$

$\Rightarrow x=5$ 或 17

將其代入原式檢驗均合條件，故$x=5$ 或 17

3. [答案]：(D)

[解法]：

$\log_3(3^x+8)<\frac{x}{2}+1+\log_3 2\Rightarrow\log(3^x+8)-\log_3 2<\frac{x}{2}+1$

$\Rightarrow \log_3\dfrac{3^x+8}{2}<\frac{x}{2}+1\Rightarrow\dfrac{3^x+8}{2}<3^{\frac{x}{2}+1}\Rightarrow 3^x+8<2(3^{\frac{x}{2}+1})$

令$3^{\frac{x}{2}}=t>0$

$\Rightarrow t^2+8<2(3t)\Rightarrow t^2-6t+8<0\Rightarrow 2<t<4\Rightarrow 2<3^{\frac{x}{2}}<4$

$\Rightarrow \log_3 2<\frac{x}{2}<\log_3 4\Rightarrow\log_3 4=2\log_3 2<x<2\log_3 4=\log_3 16$，故選(D)

4. [答案]：(A)(C)

[解法]：

若 $a>1$，則圖形如(A)；若 $0<a<1$，則圖形如(C)。故選(A)(C)

5. [答案]：6

[解法]：

設需x年後本利和才會超過本金A元的 2 倍

$\Rightarrow A(1+0.125)^x>2A$

$\Rightarrow (1.125)^x>2 \Rightarrow (\frac{9}{8})^x>2$

$\Rightarrow x\times\log\frac{9}{8}>\log2 \Rightarrow x(2\log3-3\log2)>\log2$

$\Rightarrow x(2\times0.4771-3\times0.3010)>0.3010$

$\Rightarrow x>\dfrac{0.3010}{2\times0.4771-3\times0.3010}\fallingdotseq 5.87$

故取$x=6$。

6. [答案]：13 年

[解法]：

設n個月後某甲可還清貸款，依題意可得下式：

$1\times(1+0.006)^{n-1}+1\times(1+0.006)^{n+2}+\ldots+1\times(1+0.006)^1+1=100(1+0.006)^n$

$\Rightarrow \dfrac{1\times[(1.006)^n-1]}{1.006-1}=100(1.006)^n$

$\Rightarrow (1.006)^n-1=0.6(1.006)^n$

$\Rightarrow 0.4(1.006)^n=1$

$\Rightarrow \log0.4+n\times\log1.006=\log1$

$\Rightarrow (2\log2-1)+n\times\log1.006=0$

$\Rightarrow n\times\log1.006=1-2\log2=0.398$

$\Rightarrow n=\dfrac{0.398}{0.0026}\fallingdotseq 153$，但 $153\div12\fallingdotseq 12.75$

故某甲需 13 年才可還清

7. [答案]：(A)(B)(C)(D)(E)

[解法]：

由**算幾不等式**：$a>0$，$b>0$ 時，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 。

可知：(A),(B)正確。

(C) $(\sqrt{10}+\sqrt{20})^2-\sqrt{30}^2=2\sqrt{10}\times\sqrt{20}>0 \Rightarrow \sqrt{10}+\sqrt{20}>\sqrt{30}$ ……(○)

(D) $\log10+\log20=\log(10\times20)=\log200>\log30$……(○)

(E) 直接計算可知$\frac{10^2+20^2}{2}=250>225=15^2=(\frac{10+20}{2})^2$……(○)

8. [答案]：10

[解法]：

設甲乙兩菌一開始均有n個，經x天後混合可成爲受歡迎的食品

依題意：$\dfrac{n(1+3)^x}{n(1+1)^x}>10^3$

$\Rightarrow 4^x>10^3\times2^x$

$\Rightarrow x\times\log4>3+x\times\log2$

$\Rightarrow x(\log4-\log2)>3$

$\Rightarrow x\times\log2>3\Rightarrow x>\dfrac{3}{\log2}\fallingdotseq 9.66$ 故取x=10。

9. [答案]：8

[解法]：

設一開始的薪水為N元，依題意可得下式：

$N(1+a\%)^{10}=2N$

$\Rightarrow(1+a\%)^{10}=2$

$\Rightarrow 10\times\log(1+0.01a)=\log2$

$\Rightarrow\log(1+0.01a)=0.03010$

由表中之值發現$\log(1+0.01\times7)=0.0294$，$\log(1+0.01\times8)=0.0334$

$\Rightarrow 7<a<8$ 即至少需調薪超過 7%，但a希望為整數，故取其最小值為 8

10. [答案]：(2)(3)

[解法]：

由新方程式 $2\log x=2^x$思考，因x為真數，所以$x>0$。

$\Leftrightarrow\log_2 x^2=x$，$x>0$

$\Leftrightarrow x^2=2^x$，$x>0$，但原方程式$x^2=2^x$有二正一負實數解

故 $2\log_2 x=x$恰有兩正實數解$\Rightarrow$小明，小華說法正確。

11. [答案]：(3) (4)

[解法]：

(1) $9\cdot\log10=9<10\cdot\log9=20\cdot\log3=9.542\Rightarrow 10^9<9^{10}$

(2) $12\cdot\log10=12>10\cdot\log12=10\cdot(2\log2+\log3)=10.791\Rightarrow 10^{12}>12^{10}$

(3) $11\cdot\log10=11>10\cdot\log12=10.791>10\cdot\log11\Rightarrow 10^{11}>12^{10}>11^{10}$

(4) 令 $f(x)=10^x-x^{10}$，因 $f(0)=1>0$ 且 $f(-1)=10^{-1}-1<0$

故存在實數 $a\in(-1,0)$ 使得 $f(a)=0$　　即$10^x=x^{10}$ 有一負根。

12. [答案]：(4)

[解法]：設實際倍數為 t 倍$\Rightarrow t^{0.7}=10$

取對數$0.7\log t=1\Rightarrow\log t=\dfrac{1}{0.7}=1.428\cdots$

又 $\log18=\log2+2\log3=1.2552$ ，$\log21=\log3+\log7=1.3222$ ，

$\log24=3\log2+\log3=1.3801$ ，$\log27=3\log3=1.4313$ ，

$\log36=2(\log2+\log3)=1.5562$ ，故 t 最接近 27。

13. [答案]：(1)0 分貝 (2)80 分貝 (3)90 分貝

[解法]：

(1) $d(10^{-12})=10\cdot\log\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}=0$（分貝）

(2) $d(10^{-4})=10\cdot\log\dfrac{10^{-4}}{10^{-12}}=10\cdot\log10^8=80$（分貝）

(3) $70 = 10 \cdot \log \dfrac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{-5}$

百支的強度 $I = 100 \cdot 10^{-5} = 10^{-3}$

故噪音 $= d(10^{-3}) = 10 \cdot \log \dfrac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{9} = 90$（分貝）

14. [答案]：(3)

[解法]：

設芮氏級數原爲x級，增加n級，則震幅約變爲 10^n倍，能量約變爲 32^n倍，依題意：

$32^n = 10^5 \Rightarrow n = \dfrac{1}{\log 2} \approx 3.32$

所以震幅約變爲$10^n \approx 10^{3.32} \approx 1000$倍，選（3）

15. [解法]：

(1) $r(x) = \dfrac{y(x)}{1 - y(x)} = \dfrac{\frac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}}{1 - \frac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}} = \dfrac{2^{-3+x}}{1 + 2^{-3+x} + 2^{-3+x}} = 2^{x-3}$

因爲底數 2 比 1 大，當 $x_1 > x_2$ 時

$\Rightarrow x_1 - 3 > x_2 - 3 \Rightarrow 2^{x_1 - 3} > 2^{x_2 - 3}$

$\Rightarrow r(x_1) > r(x_2)$

表示 $r(x)$ 爲遞增函數。

(2) $y(8) = \dfrac{2^5}{1 + 2^5} = \dfrac{32}{33}$

不成功的機率爲 $1 - y(8) = \dfrac{1}{33} < \dfrac{1}{25} = 4\%$

16. [答案]：(5)

[解法]：

設a_1=a，依題意可知

$(0,0) \xrightarrow{\text{往右}} (\log a,0) \xrightarrow{\text{向上}} (\log a,\log ar) \xrightarrow{\text{往右}} (\log a+\log ar^2,\log ar) \xrightarrow{\text{向上}}$

$(\log a+\log ar^2,\log ar+\log ar^3) \xrightarrow{\text{往右}} (\log a+\log ar^2+\log ar^4,\log ar+\log ar^3)\cdots$

$\xrightarrow{\text{向上}} (\log a+\log ar^2+\ldots+\log ar^8,\log ar+\log ar^3+\ldots+\log ar^9)=(5+5\log 2,5+\dfrac{15}{2}\log 2)$

$5+5\log 2= \log a+\log ar^2+\ldots+\log ar^8=5\log a+20\log r\ldots.(1)$

$5+\dfrac{15}{2}\log 2= \log ar+\log ar^3+\ldots+\log ar^9=5\log a+25\log r\ldots(2)$

由(1)(2)可解得$\log a=1-\log 2=\log 5 \Rightarrow a=5$ 代入(1)可得$r=\sqrt{2}$。

17. [答案]：(A)(B)(D)

[解法]：

如圖，令函數$f(x)=a^x$

(A)因$f(1)=2=a^1$，所以$a=2$……(○)

(B)$f(5)=2^5=32>30$……(○)

(C)$f(x_4)=4$，$f(x_{12})=12$

$\Rightarrow 4 = 2^{x_4}$ 且 $12 = 2^{x_{12}}$

$\Rightarrow 2^{x_{12}-x_4}=3$

$\Rightarrow x_{12}-x_4=\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}\fallingdotseq 1.58>1.5$

(D)因 $f(t_1)=2$，$f(t_2)=3$，$f(t_3)=6$

$\Rightarrow 2^{t_1}=2$ 且 $2^{t_2}=3$ 且 $2^{t_3}=6$

$\Rightarrow 2^{t_3}=6=2\times 3=2^{t_1}\times 2^{t_2}=2^{t_1+t_2}\ \Rightarrow t_1+t_2=t_3$……(○)

(E)經計算可知第 1 到第 3 個月之間蔓延平均速度

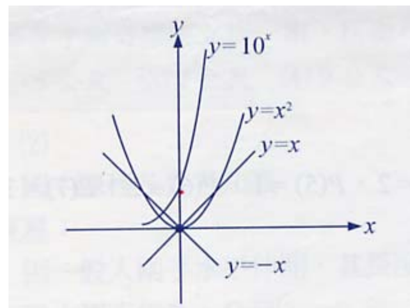
≠第 2 到第 4 個月之間蔓延平均速度

18. [答案]：(B)(C)(D)(E)

[解法]：

若 $f(x)=g(x)$ 有實數解 $\Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ 兩圖形有交點

畫出 $y=10^x$，$y=x$，$y=x^2$，$y=-x$ 之圖形如右



可知：(A) $10^x=x$ 沒有實數解

(B) $10^x=x^2$ 恰有一負實數解

(C) $10^x>x$，$\forall x\in R$ 均成立

(D) $10^x>x^2$，$x>0$ 均成立

(E) $10^x=-x$ 有實數解

19. [答案]：(A)(B)(C)(D)(E)

[解法]：

根據複利的觀念可得：

$A=1000\times[(\frac{1005}{1000})^{12}+(\frac{1005}{1000})^{11}+\ldots+(\frac{1005}{1000})]=1000\times[\sum_{k=1}^{12}(\frac{1005}{1000})^k]$

$B=2000\times[(\frac{1005}{1000})^{12}+(\frac{1005}{1000})^{10}+\ldots+(\frac{1005}{1000})^2]=1000\times[2\times\sum_{k=1}^{6}(\frac{1005}{1000})^{2k}]$

因 $\frac{1005}{1000}>1$，所以 $(\frac{1005}{1000})^m>(\frac{1005}{1000})^n$，$\forall m>n$，$m,n\in N$

故 $A<B<2000\times[(\frac{1005}{1000})^{12}\times 6]=12000(\frac{1005}{1000})^{12}$

20. [答案]：(2)

[解法]：

$\log_7 a=11\Rightarrow a=7^{11}$，$\log_7 b=13\Rightarrow b=7^{13}$

$\Rightarrow a+b=7^{11}+7^{13}=7^{11}\cdot(1+7^2)=50\cdot 7^{11}$

$\log_7(a+b)=11+\log_7 50\approx 11+\log_7 49=13$

21. [答案]：$\frac{1}{4}$

[解答]：

令$t=\log_x 2$

由$\log_x 4-\log_2 x=1$

$\Rightarrow 2t-\frac{1}{t}=1\Rightarrow 2t-\frac{1}{t}=1\Rightarrow 2t^2-t-1=0\Rightarrow(2t+1)(t-1)=0$

$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}$或$1\Rightarrow \log_x 2=-\frac{1}{2}$或$1\Rightarrow x=\frac{1}{4}$或$2$但$0<x<1$，故$x=\frac{1}{4}$ 。

22. [答案]：(2)(5)

[解法]：

(1)錯誤：$0<n_A<10\Rightarrow P_A<1$

(2)正確：$P_A=5\Rightarrow n_A=10^5\Rightarrow n_B=10^5$

(3)錯誤：$\frac{10^8}{10^4}=10^4$(倍)

(4)錯誤：因爲$P_A=\log(n_A)$，若$P_A=2\Rightarrow n_A=10^2$，增加 1，$P_A=3\Rightarrow n_A=10^3$

(5)正確：$n_B=5\times10^4$，因爲$n_A\times n_B=10^{10}\Rightarrow n_A=\frac{10^{10}}{5\times10^4}=2\times10^5\Rightarrow P_A$約爲 5.3010。

故選(2)(5)

23. [答案]：0.9162

[解法]：

令$a=\sqrt[3]{\frac{5.45\times10.7}{75.8}}=b\times10^n$，其中 $1\le b<10$，$n\in Z$

$\Rightarrow\log a=\frac{1}{3}[\log5.45+\log(1.07\times10)-\log(7.58\times10)]$

$=\frac{1}{3}[\log5.45+\log1.07+1-(\log7.58+1)]$

$=\frac{1}{3}[\log5.45+\log1.07-\log7.58]$

$=\frac{1}{3}[0.7364+0.0294-0.8797]=-0.0379=-1+0.9621$

所以$n=-1$，$\log b=0.9621$

考慮$\log 9.16=0.9619$，$\log b=0.9621$，$\log 9.17=0.9624$，

利用內插法可得 $\frac{b-9.16}{9.17-9.16}=\frac{0.9621-0.9619}{0.9624-0.9619}\Rightarrow b=9.162$

所以$a=9.162\times10^{-1}=0.9162$。

24. [答案]：$\frac{1}{2}$

[解法]：

因$\log_4 7=\log_2 7^{\frac{1}{2}}$，所以$2^{\log_4 7}=2^{\log_2 7^{\frac{1}{2}}}=7^{\frac{1}{2}}$，故$x=\frac{1}{2}$

25. [答案]：(A)(D)

[解法]：

(A)$\log 20-\log 2+\log_3 1=\log\frac{20}{2}+0=1$……(○)

(B)$(\log_a x)^2\neq 2\log_a x=\log_a x^2$

(C)$\log_{25}12=\log_{5^2}12=\log_5 12^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_5 12=\frac{1}{2}(\log_5 4+\log_5 3)=\frac{a+b}{2}$

(D)令$x=a\times 10^n$

因$\log x$與$\log 2001$ 的尾數相同$\Rightarrow a=2.001$

而$\log x$的首數爲$-2\Rightarrow n=-2$

故$x=2.001\times 10^{-2}=0.02001$……(○)

(E)$\log 6^{100}=100\log 6=100(\log 2+\log 3)=77.81\Rightarrow 6^{100}$爲 78 位數。

26. [答案]：(D)

[解法]：

$\log_{0.5}(x-2)>\log_{0.25}(4x^2-17x+4)$

$\Leftrightarrow\log_{0.25}(x-2)^2>\log_{0.25}(4x^2-17x+4)$，但$x-2>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2>0\\4x^2-17x+4>0\\(x-2)^2<4x^2-17x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x>4\text{ 或 }x<\frac{1}{4}\\x>\frac{13}{3}\text{ 或 }x<0\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{13}{3}\text{，故選(D)}$$

27. [答案]：(D)

[解法]：

令$x=a\times 10^n$，即$\log x$之尾數爲$\log a$，首數n

$\Rightarrow\log 0.1234=\log 1.234\times 10^{-1}=-1+\log 1.234\quad\Rightarrow\log a=\log 1.234\quad\Rightarrow a=1.234$

又$\log 5678=\log 5.678\times 10^3=3+\log 5.678\quad\Rightarrow n=3$

所以$x=1.234\times 10^3=1234$，故選(D)

28. [答案]：(1)0.0040764 (2)24.5176

[解法]：

令$x=a\times 10^n$，$1\leq a<10$，$n\in Z$

(1) $\log x=-2.3897=-3+0.6103\Rightarrow n=-3$，$\log a=0.6103$

但 $0.6.96=\log 4.07<\log a=0.6103<\log 4.08=0.6107$

由內插法可得 $\frac{a-4.07}{4.08-4.07}=\frac{0.6103-0.6096}{0.6107-0.6096}\Rightarrow a=4.0764$

$\Rightarrow x=4.0764\times 10^{-3}=0.0040764$

(2)令$x=b\times 10^m$，$1\leq b<10$，$m\in Z$

$\log x=1.3895=1+0.3895\Rightarrow m=1$，$\log b=0.3895$

但 $0.3892=\log 2.45<\log b=0.3895<\log 2.46=0.3909$

由內插法可得 $\dfrac{b-2.45}{2.46-2.45}=\dfrac{0.3895-0.3892}{0.3909-0.3892}\Rightarrow b=2.45176$

$\Rightarrow x=2.45179\times 10^1=24.5176$。

29. [答案]：31

[解法]：

$$A=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\ldots+(\frac{1}{2})^{100}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^{100}]}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^{100}$$

但$\log(\frac{1}{2})^{100}=100\times(-\log 2)=-30.1=-31+0.9$

所以$(\frac{1}{2})^{100}=0.\underbrace{000\cdots 0k}_{31個}\cdots$，故$A=0.\underbrace{999\cdots 9t}_{31個}\cdots$

30. [答案]：約 664 年

[解法]：

設原質量爲N_0，而鐳衰變t年後，質量衰變成N_0a^t

$\Rightarrow \dfrac{N_0}{2}=N_0\times a^{1600}\Rightarrow a^{1600}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 1600\times\log a=\log\dfrac{1}{2}\ldots\ldots(1)$

再假設鐳衰變到原質量的 $\dfrac{3}{4}$ 時需要k年

$\Rightarrow\dfrac{3N_0}{4}=N_0\times a^k\Rightarrow a^k=\dfrac{3}{4}\Rightarrow k\times\log a=\log\dfrac{3}{4}\ldots\ldots(2)$

計算 $\dfrac{(2)}{(1)}\Rightarrow\dfrac{k}{1600}=\dfrac{\log\frac{3}{4}}{\log\frac{1}{2}}=\dfrac{\log 3-\log 4}{-\log 2}$

$$\Rightarrow k=1600\times\frac{0.4771-2\times 0.3010}{-0.3010}\fallingdotseq 663.9$$

故約 664 年後鐳衰變到原質量的$\dfrac{3}{4}$

31. [答案]：(C)

[解法]：

設天狼星、北極星的星光強度分別爲F_1,F_2

$\Rightarrow -1.4=-2.5\times\log\dfrac{F_1}{F_0}\ldots\ldots(1)$

$2=-2.5\times\log\dfrac{F_2}{F_0}\ldots\ldots(2)$

若計算(2)−(1)：

$3.4=-2.5(\log\dfrac{F_2}{F_0}-\log\dfrac{F_1}{F_0})=-2.5\times\log\dfrac{F_2}{F_1}$

$\Rightarrow 3.4=2.5\times\log\frac{F_1}{F_2} \Rightarrow \log\frac{F_1}{F_2}=\frac{3.4}{2.5}=1.36$

令$\frac{F_1}{F_2}=a\times 10^n \Rightarrow n=1$，$\log a=0.36$

由對數表可得$a=2.291$

所以$\frac{F_1}{F_2}=2.291\times 10=22.91$，故選(C)

32. [答案]：$x=10$，$10^{\frac{4}{3}}$，$10^{\frac{5}{3}}$

[解法]：

設$\log x^2=m+\alpha$，$0\le\alpha<1,\ m\in Z$

$\log\frac{1}{x}=n+\alpha$，$0\le\alpha<1,\ n\in Z$

$\Rightarrow \log x^2-\log\frac{1}{x}=m-n\in Z$

$\Rightarrow 3\log x=m-n\in Z$

$\Rightarrow \log x^3=m-n\in Z$

但 $10\le x<100$，即 $10^3\le x^3<10^6 \Rightarrow 3\le \log x^3<6$

因此，$\log x^3=3$ 或 4 或 5

$\Rightarrow x^3=10^3$或 10^4或 10^5

故$x=10$，$10^{\frac{4}{3}}$，$10^{\frac{5}{3}}$

33. [答案]：32,33,34,35,36

[解法]：

$\log(\frac{5}{3})^n=n\log\frac{5}{3}=n\log\frac{10}{6}=n(1-\log 6)$

又$(\frac{5}{3})^n$之整數部分爲七位數，即 $7\le \log(\frac{5}{3})^n<8$

$\Rightarrow 7\le n(1-\log 6)<8$

$\Rightarrow 7\le n(1-0.7781)<8$

$\Rightarrow 31.55\le n<36.55$，故$n=32,33,34,35,36$。