



第二章 指數與對數

- 指數與對數基本概念
- 指數運算
 - 指數的運算性質
 - 指數函數的定義
 - 指數函數的基本性質
 - 指數函數圖形的性質
 - 對數的定義
- 對數運算
 - 對數的性質
 - 對數函數的定義
 - 指對數不等式



指數之基本概念

■ 指數的定義

1. 設 a 為實數、 n 為正整數， a 自乘 n 次之積以 a^n 表示，即 $a \times a \times a \times \cdots \times a = a^n$ 。
指數的基本形式：

$$a^n$$

指數

底數

2. 零指數：設 $a \in R$ 、 $a \neq 0$ ，規定 $a^0 = 1$

3. 負整數指數：設 $a \in R$ 、 $a \neq 0$ 、 $n \in N$ ，則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4. 分數指數：設 $a \in R$ 、 $a \neq 0$ 、 $m, n \in N$ ，則 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

■ 指數的運算性質

設 $a > 0$ 、 $b > 0$ ，且 $m, n \in R$

$$1. a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$2. (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$3. (ab)^n = a^n \times b^n$$

$$4. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$6. a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$7. a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$8. a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

$$9. a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$10. a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$



指數函數

■ 指數函數的定義

設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， x 是任意實數，稱 $f(x) = a^x$ 為以 a 為底數的指數函數。

■ 指數函數的基本性質

1. 對任意實數 x ， $f(x) = a^x > 0$ 恆成立。
2. 對任意實數 x_1 、 x_2 ，恆有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
3. $f(x) = a^x$ 為遞增、遞減的條件：
 - (1) $a > 1$ 時， $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (嚴格遞增)
 - (2) $0 < a < 1$ 時， $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (嚴格遞減)

指數函數圖形的性質

1. $y=a^x$ 的圖形恆在X 軸上方,即 $a^x>0$ 對一切實數 x 恆成立指數與對數基本概念
2. $y=a^x$ 的圖形(不管底數 a 的大小)恆與Y 軸交於點 $(0,1)$
3. $y=a^x$ 的圖形是連續的(沒有任何斷點)
4. 當 $a>1$,如圖2.1, $y=a^x$ 圖形由左往右逐漸上升；當 $0<a<1$ ， $y=a^x$ 圖形由左往右逐漸下降指數運算 對數運算
5. $y=a^x$ 的圖形與 $y=(1/a)^x$ 的圖形恆對稱於Y 軸
6. X 軸是 $y=a^x$ 圖形的漸近線

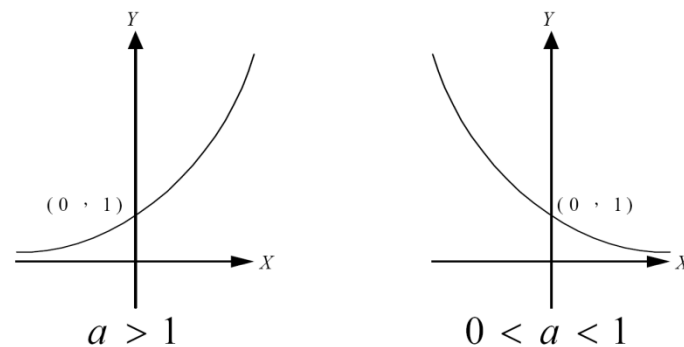


圖 2.1 當 $a>1$ (左)與 $0<a<1$ (右)之圖形 5

EX1.

化簡下列各式：

$$(2^{-2})^{-4} + (20^{-3})^{\frac{2}{3}} + (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} \quad (1000^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{1}{9}} \div 5^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} \quad (2-\sqrt{3})^{12}(2+\sqrt{3})^{10}$$

Ans: 原式 $256 + \frac{1}{400} + 16 = 272\frac{1}{400}$ 。

原式 $10^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2$ 。

原式 $(2-\sqrt{3})^2 [(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{10} = 7 - 4\sqrt{3}$ 。

EX2.

設 $(11.5)^a = (0.0115)^b = 1000$ ，則 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = ?$

設 $53^x = 9$ ， $477^y = 243$ ，求 $\frac{2}{x} - \frac{5}{y}$ ？

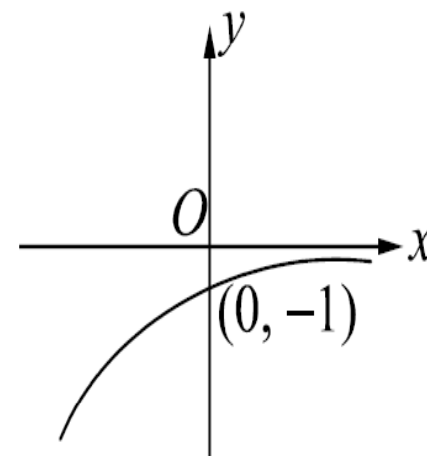
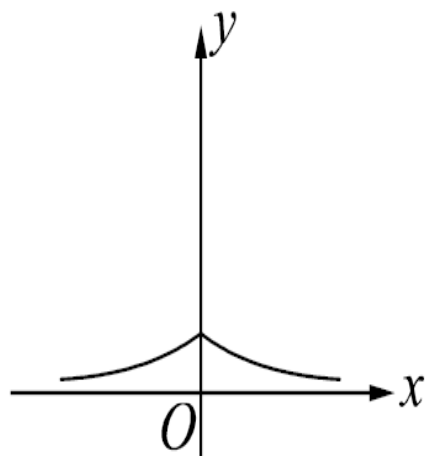
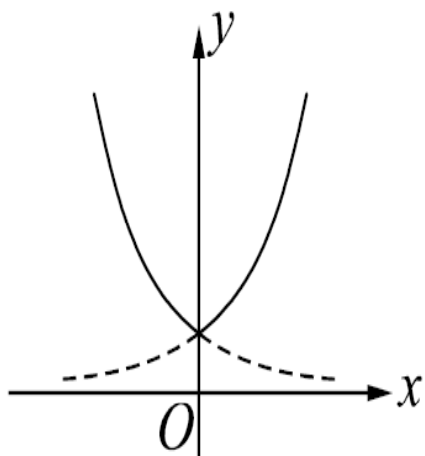
Ans: $11.5 = 10^{\frac{3}{a}}$ ， $0.0115 = 10^{\frac{3}{b}}$ $\therefore 10^{\frac{3}{a} - \frac{3}{b}} = 1000$ ， $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$ 。

$53 = 3^{\frac{2}{x}}$ ， $477 = 3^{\frac{5}{y}}$ ， $3^{\frac{2}{x} - \frac{5}{y}} = \frac{1}{9}$ $\therefore \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = -2$

EX3.

作下列各函數圖形： $y = 2^{|x|}$ ， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ ， $y = x^2$ 。

Ans:





對數之基本概念

■ 對數的定義

若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ；而 b 為正數，且實數滿足 $a^x = b$ ，則 x 稱為以 a 為底數， b 的對數，記為 $\log_a b$ ，亦即 $x = \log_a b$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

真數
底數

■ 對數的性質

1. 指數的性質： $a^0 = 1 \Rightarrow$ 對數的性質： $\log_a 1 = 0$

指數的性質： $a^1 = a \Rightarrow$ 對數的性質： $\log_a a = 1$

2. $\log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N$

3. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

4. $\log_a M^r = r \log_a M$

5. $\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$ (換底公式)

6. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

7. $a^{\log_a M} = M$

8. $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$

9. $\log_{a^r} M = \frac{1}{r} \log_a M$

10. $\log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M$



對數函數

■ 對數函數的定義

設 a 是異於 1 的正數，對於任意實數 $x > 0$ ，稱 $f(x) = \log_a x$ 為以 a 為底數的對數函數

■ 指對數不等式*

1. 若 $a > 1$ 且 $x > y$ ，則 $a^x > a^y \Rightarrow x > y > 0$ ， $\log_a x > \log_a y$

2. 若 $0 < a < 1$ 且 $x > y$ ，則 $a^x < a^y \Rightarrow x > y > 0$ ， $\log_a x < \log_a y$

EX1.

若 $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$, 試以 a 、 b 表示 $\log_{63} 84 = ?$

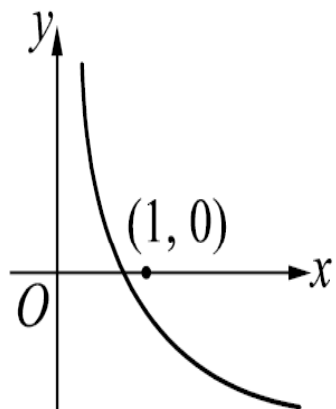
Ans:

$$\log_{63} 84 = \frac{\log_2 84}{\log_2 63} = \frac{2 + \log_2 3 + \log_2 7}{\log_2 7 + 2\log_2 3} = \frac{ab + a + 2}{ab + 2a}$$

$$(\because (\log_2 3)(\log_3 7) = ab = \log_2 7)$$

EX2.

下圖為函數 $y = a + \log_b x$ 之部份圖形，其中 a 、 b 為常數，則下列何者為真？



- (A) $a < 0, b > 1$ (B) $a > 0, b > 1$ (C) $a = 0, b > 1$
(D) $a > 0, 0 < b < 1$ (E) $a < 0, 0 < b < 1$ 。

Ans: $a < 0, 0 < b < 1$ ，選(E)。